

数学通論 レポート 2b(2の補足)

氏名	学籍番号

注意 1.1 • 提出日時・場所： 次回5月23日の授業前, 教室にて

- この用紙に裏表直接記入する事。この用紙でスペースが足りない場合は A4 の用紙を付け加える事。

問 2b.1

- 1.
- $k, n = 0, 1, 2, 3, \dots$
- のとき,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nxdx = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 2\pi & k = n = 0 \\ \pi & k = n > 0 \end{cases}$$

となることを示せ。

2. 公式

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \dots \right)$$

を次のようにして導いた (これを $|x|$ の Fourier 展開と呼ぶ)。

- (a)
- $|x| = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos kx$
- (
- $-\pi < x < \pi$
-) と書けることが知られている。

以下 c_k を決めていく。

- (b)
- $\cos nx$
- をかけて,
- $[-\pi, \pi]$
- の範囲で積分する。

すると,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nxdx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nxdx \text{ となる.}$$

- (c)
- $n = 0$
- のとき, 左辺 =
- $2 \int_0^{\pi} x dx = \pi^2$

$$\text{右辺} = c_0 \times 2\pi, \quad \text{よって } c_0 = \frac{\pi}{2}$$

- (d)
- $n = 1$
- のとき, 1. より, 右辺は,
- πc_1
- となる。

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos x dx = \square \text{ である. よって, } c_1 = -\frac{4}{\pi} \text{ となる.}$$

- (e) 同様にして,
- c_k
- を求めることが可能だが, どのように計算すればよいか説明せよ。

注 1 $|x|$ の Fourier 展開で, $x = 0$ を代入すると,

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

なる不思議な等式を得る。

注 2 Fourier 展開は, デジカメや mp3 プレーヤーで利用されている。

3. 2 の計算で, 数学的証明 (正当化) が必要な部分を指摘せよ。

問 2b.2

$-\pi < x < \pi$ で, $x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin kx$, (c_k は定数) と展開できることが知られている. 問 2b.1 の方法を用いて, c_k を決めよ.

(ヒント $\sin nx$ をかけて, $[-\pi, \pi]$ で積分する.)