2010
5/2 日
9:45– 4月のまとめ

- 大学1~3年

 数学 暗記することもたくさんある。

 概念. 単射, 全射 　数学を論理的な日本語で。

 どうして、こんな概念が…

- ◎ 抽象化 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

 $\to (f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$

 例. 線形写像。1次変換で、$|A|=0$ or $\neq 0$

複雑な論理 → 記号（論理） 　論理自体の数学

（複雑なつるかめ算 文章題 → 連立方程式 記号で解く。）

§2. 論理とアルゴリズム（コンピュータ）

"命題" 真偽がきまっているもの（true, false）

例 1. $3<5$ 　T

2. $\sqrt{2}<2$ 　F

3. $x<2$ 　命題ではない

4. 任意の実数xに対して、$x^2\geq 0$ 　T

言, テスト

"条件命題" ① $P(x)$ ② xのうごく範囲U

$\boxed{\text{xになにか代入すれば、命題となるもの}}$

~~$x\in U$ 全体集合~~

$P(x)$を"$x<2$"とすると、これは条件命題

$x\in U=\mathbb{R}$ 　Uを全体集合

$\{x\in U \mid P(x)がT\}$ を$P(x)$の真理集合という。

$P(x,y)$ 2変数の条件命題

全称命題

"Uのすべての要素(x)に対して、$P(x)$が成り立つ"
（任意の）

$$\forall x\in U,\ P(x)$$

$\forall$は any all

例. $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2\geq 0$ はT

$\forall x\in\mathbb{R},\ x^2-1\geq 0$ はF

問

"$\forall x\in U,\ P(x)$" がT

$\iff$ $P(x)$の真理集合がU

問 ① $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2+x+1\geq 0$ はTかFか

② $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2>0$ はTかFか?

例

$\forall x\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R},\ x^2+2y^2\geq 0$

特称命題

"Uのある要素(x)に対して、$P(x)$が成り立つ。
（ある$x\in U$が存在して、$P(x)$ 〃 ）"

$$\exists x\in U,\ P(x)$$

$\exists$ exists

$\exists x\in\mathbb{R},\ x^2-1\geq 0$ はT

$\exists x\in\mathbb{R},\ x^2>0$ はT

$\exists x\in\mathbb{Q}\ \ x^2=2$ はF

$\exists x\in\mathbb{R}\ \ x^2=2$ はT

◎ $\{x \mid P(x)がT\}\neq\emptyset$

命題Pの否定を $\neg P$（または $\bar{P}$）と書く。

PがTなら $\neg P$はF

PがFなら $\neg P$はT （定義）

2010
5/2 日
11:35〜

$P \Leftrightarrow Q$　PとQの真偽が一致　同値な命題

定理 (P.276)

(1) $\overline{\forall x\in U,\ P(x)} \Leftrightarrow \exists x\in U,\ \overline{P(x)}$

(2) $\overline{\exists x\in U,\ P(x)} \Leftrightarrow \forall x\in U,\ \overline{P(x)}$

∵ (1)

① $\forall x\in U,\ P(x)$ が T のとき.

$P(x)$の真理集合はU全体。よって、$\overline{P(x)}$の真理集合はϕ(空)

$\exists x\in U,\ \overline{P(x)}$ は F

② "$\forall x\in U,\ P(x)$" が F のとき

$P(x)$の$\underbrace{\text{真理集合}}_{S}$はUより真に小さい。

$\overline{P}(x)$の真理集合は、

$U\setminus S \neq \phi$

なので "$\exists x\in U,\ \overline{P(x)}$" は真.

以上より (1)の $\Longrightarrow$ がいえた。

同様に、(1)の $\Longleftarrow$ もいえる。(演習)

(2)は(1)の対偶.

$\forall x\in U,\ P(x)$ が F を示すには.

$\exists x\in U,\ \overline{P(x)}$ をいえばよい。

$\overline{P(x)}$をTにするxのことを$\underbrace{\text{反例}}_{P(x)の}$という。

例. $\forall x\in \mathbb{R},\ x^2\in \mathbb{Q}$ は F.

$x^2\in\mathbb{Q}$の反例をあげよ。　$\sqrt[4]{2} = \sqrt{\sqrt{2}}$.

例題.

① $\forall x\in \mathbb{R},\ x^2-1\geqq 0$ —(P)

を日本語でかきなさい。

② (P)の否定を日本語および記号でかけ (2とおり)

$\exists x\in \mathbb{R},\ x^2-1<0$.

例題 (B.626)

① $\forall x\in \mathbb{N},\ \exists y\in \mathbb{N},\ x<y$

② $\forall x\in \mathbb{N},\ \exists y\in \mathbb{N},\ y\leqq x$.

(ア) 日本語になおせ。

(イ) 真偽は?

(ウ) 否定をつくれ。

大事 yはxにイゾンしていない。

演習 $\forall x\in \mathbb{N},\ \exists y\in \mathbb{N},\ y<x$

$P\wedge Q$

$P\vee Q$.　　十分条件

高 $\overline{P}$

$P\Rightarrow Q \Leftrightarrow \overline{P}\vee Q$ と def　$\boxed{\text{重要! 次回}}$

Pが F なら $P\Rightarrow Q$は常に真

トートロジー

$P\wedge(Q\vee R)=(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$

高 $\overline{P\wedge Q}=\overline{P}\vee\overline{Q}$, $\overline{P\vee Q}=\overline{P}\wedge\overline{Q}$, $\overline{\overline{P}}=P$