c05.

2009 4/3金 15:49　　2010 4/9金 第2版.

§1. 写像 (map)

(実数)関数 $y=f(x)$.

1次変換 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$　↘数C

⇩ 一般化

写像 (map)

又は"関数"ということもある。

X, Yを任意の空でない集合とする。

このとき.

(i) Xの任意の要素に対して

(ii) それに対応するYの要素がただ1つ存在する。

この対応をXからYへの写像とよぶ.

$$f: X \to Y$$

$$X \xrightarrow{f} Y$$

例1 関数 $y=x^2$

$X=\mathbb{R}$ (realnumbers, 実数全体の集合)

$Y=\mathbb{R}$

$x \in X$ に対して, $x^2 \in Y$ をさせる。　$x \mapsto x^2$

例2. $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ 平面 → 数A にあり

$X=Y$

$X \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して. $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Y=\mathbb{R}^2$

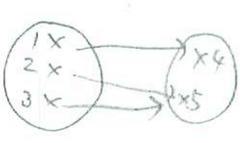
を対応させる.

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$f: x \mapsto y$　　y を x の f による像 (image) (p.255)

例3. $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{4,5\}$

$f(1)=4$
$f(2)=5$
$f(3)=5$.



X を定義域 (domain of definition)

$f(X) \underset{def}{=} \{f(x) \mid x \in X\}$.

を値域.

例1 の場合値域は、

$\{y \mid y \geq 0\}$ となる。　p.256

$Y=$値域 とは限らない.

p.256

$Y=f(X)$ のとき。

f は上への写像 (onto map)

または 全射 (surjection)

という。

例2 は全射.

15:56
4/8
9:44

任意の $y \in f(X)$ に対して、

$f(x)=y$ となる x が ただひとつ

のとき、f は単射 (injection)

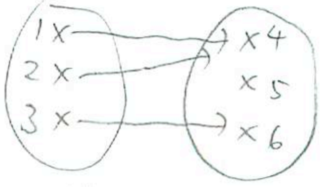
$x \neq x'$ なる任意の $x, x' \in X$ に対して、

$f(x) \neq f(x')$ のとき f は単射

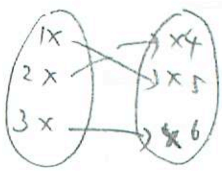
$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x)=y\}$ 逆像.

$f^{-1}(y)$ が空か $\# f^{-1}(y)=1$ のとき単射

わかりにくい。



ダメ×



O.K.

2009
4/8水
9:48– p.258

fが全射かつ単射のとき
fを全単射という。

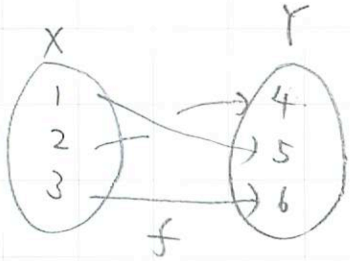
p.259.

$f: X \to Y$ が全単射とする。

$y \in Y$ に対して、$f(x)=y$ となる x を
対応させる写像を f^{-1} と書き
fの逆写像(inverse map)という。

$$f^{-1}: Y \to X$$

例1



$$f^{-1}(4)=2,\ f^{-1}(5)=1,\ f^{-1}(6)=3$$

例2.の逆写像を求めよ。(例2は全単射)

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

逆写像は逆変換にほかならない。

例 $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \ni x \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$　　$\mathbb{R}_{\geq 0}$ 非負実数

$f^{-1}: \mathbb{R}_{\geq 0} \ni y \longmapsto \sqrt{y} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$　　グラフをおりかえしたもの…
集合的に考える…

p.260.

合成写像 (composed map)

$f: X \to Y$
$g: Y \to Z$

$$g \circ f : X \longrightarrow Z$$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ と定義

高 式の代入みたいなイメージ

恒等写像

合成写像 $\xleftarrow{\text{一般化}}$ 合成変換 (数C)

10:00
20分

プリントの問題

例 $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$f \circ f$ は何?　　関数＝写像
として つかう

次回
写像のdef.(ていぎ) 例.
単射 〃
逆写像 〃
テスト.(論理的な日本語)

$$A \times B \underset{\text{def}}{=} \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$$

直積集合

ことば、論理.
"目にみえないものを扱う。"
演算も、写像.