

数学通論 レポート 1

氏名	学籍番号

注意 1.1 • 提出日時・場所：次回4月16日の授業前, 教室にて

- この用紙に裏表直接記入する事。この用紙でスペースが足りない場合はA4の用紙を付け加える事。

目標: 次の定義 (definition) を明確に理解する。写像 (map), f^{-1} , $f \circ f$, 定義域 (domain of definition), 値域 (range), 単射 (injection), 全射 (surjection), $A \times B$.

問 1.1 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ に対して、写像 (関数) $f: A \rightarrow B$ を $f(1) = 5, f(2) = 6, f(3) = 4$ で定義する。

- (1) $f^{-1}(4), f^{-1}(5), f^{-1}(6)$ を求めよ。
- (2) 定義にしたがって f は全単射であることを説明せよ。
- (3) $f \circ f$ は定義できない。理由を述べよ。

解答

問 1.2 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ に対して、写像 $f: A \rightarrow A$ を、 $f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 1, f(4) = 3$ で定義する。つまり $f(x)$ は $2x$ を 5 で割った余り。

- (1) f の逆写像 $f^{-1}(1), \dots, f^{-1}(4)$ を求めよ。 $f^{-1}(x)$ は x に をかけて 5 で割った余りである。
 を求めよ。
- (2) $(f \circ f)(1), \dots, (f \circ f)(4)$ を求めよ。 $(f \circ f)(x)$ は x に をかけて 5 で割った余りである。
 を求めよ。
- (3) $(f \circ f \circ f \circ f)(1), \dots, (f \circ f \circ f \circ f)(4)$ を求めよ。

解答

問 1.3 $\mathbf{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ とする. ここで \mathbf{R} は実数の集合. 写像

$$f : \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (x + y, 2xy) \in \mathbf{R}^2$$

を考える. (1) $f^{-1}(0, 0)$, $f^{-1}(3, 2)$, $f^{-1}(1, 1)$ をそれぞれ求めよ. (2) f は全射か? f は単射か? (3) 値域 $f(\mathbf{R}^2)$ を求めて図示せよ.

解答

問 1.4 (1) \mathbf{R} から \mathbf{R} への写像 $f(x)$ を x が有理数の時 $f(x) = 2x$, x が無理数の時 $f(x) = 0$ と定義する. $f^{\circ n} = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n 個の合成) を求めよ.

(2) \mathbf{C} で複素数の集合を表す. \mathbf{C} から \mathbf{C} への写像 $f(z)$ を $f(z) = (\cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta)z$ と定義する. $f^{\circ n}(z)$ を求めよ. (なお $f^{\circ n}$ はこの講義のみで使う記号である.)

(3) $[-1, 1]^3 = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ は立方体である. 立方体の二つの頂点 (x_1, x_2, x_3) , (y_1, y_2, y_3) が同じ面の上にある必要十分条件を x_i, y_j についての条件として書きなさい. さて, この立方体の頂点を白と赤で塗り分けるとする. ただし, 立方体の面を構成する 6 つの正方形それぞれについて, その 4 つの頂点をすべて同じ色で塗ってはならないとする. 赤で塗られる頂点の個数を 2 とするとき, なんとおりの塗り方があるか?

研究課題: 上記の問題を $[-1, 1]^4$ で考えてみよう. (“面” の定義もすること).

解答