

計算コホモロジ論と関連の話題

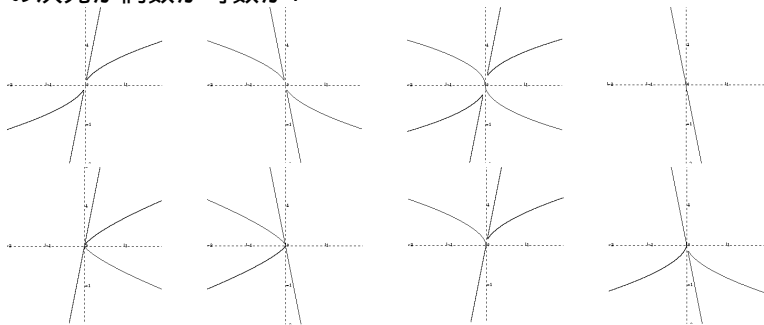
高山信毅 (Nobuki Takayama)

2009年1月8日

デモ. `kan/k0` on KnoppixMath. `DeRham2` コマンド.
最近やってる新しい試み (この研究集会ならではのものを).
問題など.

図をみて deRham cohomology 群を大体予想できないか?

例題 (Reifen curve): $f = x^p + y^q + axy^{q-1}$ の時, $H^2(\mathbb{C}^2 \setminus V(f), \mathbb{C})$ の次元が偶数か奇数か?



SVM(support vector machine) を用いた実験

kan/k0 の deRham2 コマンドを用いて, cohomology 群を計算.

学習データ, 正解データを作成.

学習データ 25 個 (年末にやってみたので, まだ少ない). R の SVM (support vector machine).

8 個問題を出題して, 正答率 75 %.

計算ホモロジという新しい分野もあるので, それほど荒唐無稽というわけではないだろう. (Pawel Pilarczyk, Computational Homology Project).

$$\begin{aligned}(p, q, a, \dim, H^2) &: (4, 6, -5, 2), (4, 6, 5, 2), (5, 9, -5, 4), (5, 9, 5, 4) \\ &: (4, 5, -5, 1), (4, 5, 5, 1), (5, 8, -5, 3), (5, 8, 5, 3)\end{aligned}$$

その他, 計算コホモロジに関係した問題

- 微分幾何の Visualization tool と 統計ソフト (まだ妄想の域を出ず).
- $L_i \in \mathbb{Q}\langle x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n \rangle$ (多項式的, holonomic).

$$O / \sum L_i \cdot O$$

を計算せよ (計算可能か?). ここで O は, 収束べき級数の芽.
cf. math.AG/0712.0001

- de Rham コホモロジ群の計算アルゴリズムは, パラメータ付き積分の微分方程式を計算する問題と関係深い.
多重積分の数値計算の問題.

パラメータつき (超幾何) 積分

$$(Hi) \quad \int_C \exp(f(x, t)) t^{-\beta-1} dt$$

$$(Hr) \quad \int_C \prod_i f_i(x, t)^{u_i} t^{-\beta-1} dt$$

の x についての漸近展開, β, u_i についての漸近展開を求めよ.

ここで $dt = dt_1 \cdots dt_m$. $x = (x_1, \dots, x_n)$, f, f_i は x, t についての多項式.

C は cycle (大体 $\int_{\partial C} t^p \partial_t^q$ (被積分関数) = 0) か, または 非 cycle (統計では重要. 後述).

様々なアプローチで研究されてきた. C がサイクルの時は, 微分方程式の導出はコホモロジ群の基底を求める問題. 微分方程式の級数解として漸近展開を求める. cf. [青本-喜多], [SST]

- arXiv:0805.3602v1 [stat.CO], Shaowei Lin, Bernd Sturmfels, Zhiqiang Xu, Marginal Likelihood Integrals for Mixtures of Independence Models.

$$\int_D \prod_{i,j \in \{A,C,G,T\}} \left(\pi \lambda_i^{(1)} \lambda_j^{(2)} + \tau \rho_i^{(1)} \rho_j^{(2)} \right)^{U_{ij}} \omega$$

$$\pi + \tau = 1, \pi, \tau \geq 0, \lambda_A^{(1)} + \lambda_C^{(1)} + \lambda_G^{(1)} + \lambda_T^{(1)} = 1, \lambda_i^{(1)} \geq 0, \dots$$

積分領域 C がサイクルでない。

問題: サイクルでない積分領域をもつ \mathcal{A} -超幾何方程式の理論とアルゴリズムを作れ。