超幾何関数の変換公式と平均反復

Keiji Matsumoto (Hokkaido Univ.)

Jan. 08, 2009

計算による数理科学の展開 2009, 神戸大学 理学部

1．算術幾何平均

$a > b > 0$ に対して数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を下記のように定める。

$$(a_0, b_0) = (a, b), \quad (a_{n+1}, b_{n+1}) = (\frac{a_n + b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n}).$$

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ はともに 収束 し、$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ となる。この共通極限を a と b の算術幾何平均 といい、$M(a, b)$ で表す。

Theorem 1 (C.F. Gauss 1799年) *Maple* による検証

$$M(a, b) = \frac{a}{F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1 - (\frac{b}{a})^2)},$$

ここで $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ は *Gauss* の超幾何関数

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n (1)_n} z^n,$$

$|z| < 1$, $(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$, $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$ である。

2．平均反復

正数全体のなす乗法群を $\mathbb{R}_+^\times$ と記す。

下記の条件をみたす $(\mathbb{R}_+^\times)^k$ 上の関数 m_0 を k 項平均 とよぶ。

(1) m_0 は連続

(2) $\min(x) \leq m_0(x) \leq \max(x)$,

$\min(x) < \max(x) \quad \Rightarrow \quad \min(x) < m_0(x) < \max(x)$

(3) $m_0(t \cdot x) = t \cdot m_0(x)$ for ${}^\forall t \in \mathbb{R}_+^\times$

ここで $x = (x_1, \ldots, x_k)$ は $(\mathbb{R}_+^\times)^k$ の元とする。

k 個の k 項平均 $m_1, \ldots, m_k$ に対して、写像 m を下記で定める。

$$m : (\mathbb{R}_+^\times)^k \ni x \mapsto m(x) = (m_1(x), \ldots, m_k(x)) \in (\mathbb{R}_+^\times)^k.$$

$a \in (\mathbb{R}_+^\times)^k$ に対して k 重数列 $\{a[n]\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(a[n]_1, \ldots, a[n]_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ を写像 m の n 回合成による a の像 $a[n] = m^n(a)$ $(n \in \mathbb{N})$ で定める。

Theorem 2 (存在定理) k重数列 $\{a[n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 収束し、k個の数列 $\{a[n]_1\}$, $\ldots$, $\{a[n]_k\}$ は 共通の極限 をもつ。この 共通極限 $m_*^\infty(a)$ は、$(\mathbb{R}_+^\times)^k$ 上の関数みなすと k項平均である。

Theorem 3 (不変原理) 共通極限 m_*^∞ は、

$$\mu(m(x)) = \mu(x), \quad \mu(t,\ldots,t) = t \text{ for } {}^\forall t \in \mathbb{R}_+^\times$$

をみたす 連続関数 μ として特徴付けられる。

Proof. 上記の性質をみたすk項平均 μ に対して、

$$\begin{aligned}\mu(a) &= \mu(m(a)) = \mu(m^2(a)) = \cdots = \mu(m^n(a)) \ (n\to\infty) \\ &\to \mu(m^\infty(a)) = \mu(m_*^\infty(a),\ldots,m_*^\infty(a)) = m_*^\infty(a).\end{aligned}$$

□

Remark 1 各 m_i が平均でなくても、共通極限 m_*^∞ が存在していれば、不変原理は適応可能。

Example 1 3つの3項平均 m_1, m_2, m_3 を以下で与える。

$$\begin{aligned} m_1(x_1, x_2, x_3) &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \\ m_2(x_1, x_2, x_3) &= \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1 + x_2 + x_3}, \\ m_3(x_1, x_2, x_3) &= \frac{3x_1x_2x_3}{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}. \end{aligned}$$

写像 m を $x \mapsto (m_1(x), m_2(x), m_3(x))$ で定める。

積 $m_1(x)m_2(x)m_3(x)$ は

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \cdot \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1 + x_2 + x_3} \cdot \frac{3x_1x_2x_3}{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2} = x_1x_2x_3$$

であり、$x_1x_2x_3$ は写像 m の引き戻しで不変である。

条件 $\mu(t, t, t) = t$ を考慮すると、

$$m_*^\infty(x_1, x_2, x_3) = \sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

である。

3. Gauss 算術幾何平均定理の証明

Fact 1 (Gauss 2次変換公式)

$$(1+z)^{2\alpha}F(\alpha,\alpha-\beta+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2};z^2)=F(\alpha,\beta,2\beta;\frac{4z}{(1+z)^2}),$$

ここで z は 0 の近くの点で、$z=0$ での $(1+z)^{2\alpha}$ の値は 1 である。

Proof of Theorem 1. Fact 1 に $\frac{b}{a}=\frac{1-z}{1+z}$, $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ を代入すると、

$$\frac{(a+b)/2}{F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;1-(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b})^2)}=\frac{a}{F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;1-(\frac{b}{a})^2)}$$

となる。この式は $a/F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;1-(\frac{b}{a})^2)$ は、算術平均 m_1 と幾何平均 m_2 で定まる写像 $m=(m_1,m_2)$ の引き戻しで不変であることを意味する。

また、$\frac{a}{F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;1-(\frac{b}{a})^2)}$ は $b=a$ のとき 分母が 1 となり a となる ので、この関数は不変原理より算術幾何平均 $M(a,b)$ と一致する。

4. Goursat's formulas から得られる平均反復

「超幾何関数の Gauss 2次変換公式」と「不変原理」から算術幾何平均の

超幾何関数による表示が得られた。

別の超幾何関数の変換公式から同様の結果が得られることが期待される。1881 年に Goursat は下記の論文で超幾何関数の変換公式を多数与えた。

[G] E.M. Goursat, Sur l'Équation Différentielle Linéaire qui Admet pour Intégrale la Série Hypergéométrique, *Ann. Sci. l'Ecole Normale Sup.* (2) **10** (1881), 3–142. pdf file

p.117–121 にある2次変換公式と p.127–140 にある3次変換公式を用いて類似定理が得られた。2次変換公式から得られた結果は Carlson により既に文献 [C] で研究されている。

我々の結果を超幾何関数のパラメーター (α,β,γ) に対して定まるデータ

$$\left\{\frac{1}{|1-\gamma|},\frac{1}{|\gamma-\alpha-\beta|},\frac{1}{|\alpha-\beta|}\right\}$$

で分類する。$F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,z)$ に対しては、このデータは$\{\infty,\infty,\infty\}$ となっている。

以下の表内では a,b は b/a が十分 1 に近くなる正数で、m_1,m_2 を2項平均とし、$m=(m_1,m_2)$ で定め $m^n(a,b)$ で得られる2重数列 $\{(a_n,b_n)\}$ の共通極限 $m_*^\infty(a,b)$ を超幾何関数で表示する。

type (M) は $\{a_n\},\{b_n\}$ が単調であること、つまり

$$b_n \le b_{n+1} \le a_{n+1} \le a_n \quad \text{or} \quad b_n \ge b_{n+1} \ge a_{n+1} \ge a_n;$$

を意味し、type (A) は上記数列が交代であること、つまり

$$b_0 \le a_1 \le b_2 \le \cdots \le b_{2n} \le a_{2n+1} \le b_{2n+1} \le a_{2n} \le \cdots \le a_2 \le b_1 \le a_0.$$

を意味する。

２次変換公式から得られる極限公式のリスト

$$\{2, 2, \infty\}$$

No.	$m_1(a,b)$	$m_2(a,b)$	type	$m_*^\infty(a,b)$
Q(1)	$\sqrt{ab}$	$\frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{2}$	(M)	$a/F\left(1,1,\frac{3}{2};1-\frac{b}{a}\right)$
Q(2)	$\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{2}$	$\sqrt{ab}$	(M)	$a/F\left(1,\frac{1}{2},\frac{3}{2};1-\frac{b}{a}\right)$
Q(3)	$\sqrt{\frac{a(a+b)}{2}}$	$\frac{a+b}{2}$	(M)	$a/F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2};1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)$
Q(4)	$\sqrt[4]{\frac{2ab}{a+b}a^2b}$	$\sqrt[4]{\frac{a+b}{2}ab^2}$	(M)	$a/F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2};1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{ab}$
Q(5)	$\frac{2ab}{a+b}$	$\frac{a+b}{2}$	(M)	$a/F\left(\frac{1}{2},1,1;1-\frac{b}{a}\right)=\sqrt{ab}$

$\{2,4,4\}$

No.	$m_1(a,b)$	$m_2(a,b)$	type	$m_*^\infty(a,b)$
Q(6)	$\frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{2}$	$\sqrt{ab}$	(A)	$a/F\left(1,\frac{3}{4},\frac{5}{4};1-\frac{b}{a}\right)$
Q(7)	$\sqrt{ab}$	$\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{2}$	(A)	$a/F\left(1,\frac{1}{2},\frac{5}{4};1-\frac{b}{a}\right)$
Q(8)	$\sqrt{\frac{b(a+b)}{2}}$	$\frac{a+b}{2}$	(A)	$a/F\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{5}{4};1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)^2$
Q(9)	$\frac{a+b}{2}$	$\sqrt{\frac{a(a+b)}{2}}$	(A)	$a/F\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{5}{4};1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)^2$
Q(10)	$\sqrt[4]{\frac{2ab}{a+b}ab^2}$	$\sqrt[4]{\frac{a+b}{2}a^2b}$	(A)	$a/F\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4};1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)=\sqrt{ab}$
Q(11)	$\sqrt[4]{\frac{a+b}{2}ab^2}$	$\sqrt[4]{\frac{2ab}{a+b}a^2b}$	(A)	$a/F\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{4};1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{ab}$

３次変換公式から得られる極限公式のリスト

以下で論文 [G] にある３次変換公式から得られる極限公式を与える。ここで現れるすべての超幾何関数のパラメーターは

$$\left\{\frac{1}{|1-\gamma|}, \frac{1}{|\gamma-\alpha-\beta|}, \frac{1}{|\alpha-\beta|}\right\} = \{2,3,6\}$$

をみたしている。

b/a が 1 に十分近くなる正数 a, b に対して (ξ_1, ξ_2) は算術平均をとると a になり、幾何平均をとると b になる複素数とする、つまり

$$\frac{\xi_1+\xi_2}{2} = a, \qquad \sqrt{\xi_1\xi_2} = b, \qquad \{\xi_1, \xi_2\} = \{a \pm \sqrt{a^2-b^2}\},$$

であり、３乗根の枝は $-\frac{\pi}{6} < \arg(\xi_i^{\frac{1}{3}}) < \frac{\pi}{6}$ $(i=1,2)$ により定める。

$$X_1 = \frac{\xi_1^{\frac{1}{3}}+\xi_2^{\frac{1}{3}}}{2}, \qquad X_2 = \sqrt{\frac{\xi_1^{\frac{2}{3}}+\xi_1^{\frac{1}{3}}\xi_2^{\frac{1}{3}}+\xi_2^{\frac{2}{3}}}{3}}, \qquad X_3 = \sqrt{\xi_1^{\frac{2}{3}}-\xi_1^{\frac{1}{3}}\xi_2^{\frac{1}{3}}+\xi_2^{\frac{2}{3}}},$$

とする。

(η_1, η_2) を算術平均をとると b になり、幾何平均をとると a になる複素数とする、つまり

$$\sqrt{\eta_1\eta_2} = a, \quad \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} = b, \qquad \{\eta_1, \eta_2\} = \{b \pm \sqrt{b^2 - a^2}\},$$

で定め、

$$Y_1 = \frac{\eta_1^{\frac{1}{3}} + \eta_2^{\frac{1}{3}}}{2}, \quad Y_2 = \sqrt{\frac{\eta_1^{\frac{2}{3}} + \eta_1^{\frac{1}{3}}\eta_2^{\frac{1}{3}} + \eta_2^{\frac{2}{3}}}{3}}, \quad Y_3 = \sqrt{\eta_1^{\frac{2}{3}} - \eta_1^{\frac{1}{3}}\eta_2^{\frac{1}{3}} + \eta_2^{\frac{2}{3}}},$$

とおく、ただし、3 乗根の枝は

$$-\frac{\pi}{6} < \arg(\eta_i^{\frac{1}{3}}) < \frac{\pi}{6}, \ (i = 1, 2), \qquad \eta_1^{\frac{1}{3}}\eta_2^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \in \mathbb{R}_+^\times$$

で定める。

No.	$m_1(a,b)$	$m_2(a,b)$	type	$m_*^\infty(a,b)$
C(1)	$b^{\frac{2}{3}}X_1$	$b^{\frac{2}{3}}X_2$	(A)	$a/F\left(\frac{1}{2},1,\frac{7}{6};1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)$
C(2)	$X_1X_2^2$	X_2^3	(A)	$a/F\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3},\frac{7}{6};1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)^3$
C(3)	$X_1X_2^2$	$X_2^2X_3$	(A)	$a/F\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{2};1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)$
C(4)	$b^{\frac{1}{3}}X_1X_2$	$b^{\frac{1}{3}}X_2X_3$	(A)	$a/F\left(\frac{5}{6},1,\frac{3}{2};1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$
C(5)	$b^{\frac{2}{3}}X_1$	$b^{\frac{2}{3}}X_3$	(A)	$a/F\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{2};1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)=\sqrt[3]{ab^2}$

No.	$m_1(a,b)$	$m_2(a,b)$	type	$m_*^\infty(a,b)$
C(6)	$a^{\frac{2}{3}}Y_2$	$a^{\frac{2}{3}}Y_1$	(A)	$a/F\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{7}{6};1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)$
C(7)	Y_2^3	$Y_1Y_2^2$	(A)	$a/\left[\frac{b}{a}F\left(\frac{2}{3},1,\frac{7}{6};1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)\right]^3$
C(8)	$Y_2^2Y_3$	$Y_1Y_2^2$	(A)	$a/F\left(\frac{1}{2},\frac{5}{6},\frac{3}{2};1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)$
C(9)	$a^{\frac{1}{3}}Y_2Y_3$	$a^{\frac{1}{3}}Y_1Y_2$	(A)	$a/F\left(\frac{2}{3},1,\frac{3}{2};1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$
C(10)	$a^{\frac{2}{3}}Y_3$	$a^{\frac{2}{3}}Y_1$	(A)	$a/F\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{1}{2};1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)=\sqrt[3]{a^2b}$

5. Borwein 兄弟の結果

Borwein 兄弟の論文 [BB1] にある結果を紹介する。

Theorem 4

$$F(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1;1-x^3) \;=\; \frac{3}{1+2x}F(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1;(\frac{1-x}{1+2x})^3),$$
$$F(\frac{1}{4},\frac{3}{4},1;1-x^2) \;=\; \frac{2}{\sqrt{1+3x}}F(\frac{1}{4},\frac{3}{4},1;(\frac{1-x}{1+3x})^2).$$

Theorem 5

$m_1(a,b)$	$m_2(a,b)$	$m_*^\infty(a,b)$
$\frac{a+2b}{3}$	$\sqrt[3]{b(\frac{a^2+ab+b^2}{3})}$	$a/F\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1;1-\left(\frac{b}{a}\right)^3\right)$
$\frac{a+3b}{4}$	$\sqrt{b(\frac{a+b}{2})}$	$a/F\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},1;1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)^2$

6. Lauricella の多変数超幾何関数 F_D

Lauricella の k-変数超幾何関数 F_D は以下のように定義される

$$F_D(\alpha,\beta,\gamma;z)=\sum_{n_1,\ldots,n_k\geq 0}^{\infty}\frac{(\alpha,\sum_{j=1}^{k}n_j)\prod_{j=1}^{k}(\beta_j,n_j)}{(\gamma,\sum_{j=1}^{k}n_j)\prod_{j=1}^{k}(1,n_j)}\prod_{j=1}^{k}z_j^{n_j},$$

ここで $z=(z_1,\ldots,z_k)$ は $|z_j|<1$ $(j=1,\ldots,k)$ をみたし、$\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_k)$, $\gamma\neq 0,-1,-2,\ldots$ とする。

$k=1$ のとき $F_D(\alpha,\beta,\gamma;z)$ は Gauss の超幾何関数 $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ となる。
$k=2$ の場合は Appell により研究されていて、$F_1(\alpha,\beta_1,\beta_2,\gamma;z_1,z_2)$ で表される。

この関数は以下の積分表示をもつ。

$$F_D(\alpha,\beta,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\gamma-\alpha}\prod_{j=1}^{m}(1-z_jt)^{-\beta_j}\frac{dt}{t(1-t)}.$$

Fact 2 $F_D(\alpha,\beta,\gamma;z)$ は 積分可能条件 $d\Omega_{\hat{f}}(z)=\Omega_{\hat{f}}(z)\wedge\Omega_{\hat{f}}(z)$ 付 の微分方程式系

$$d\hat{f}=\Omega_{\hat{f}}(z)\hat{f},\quad \Omega_{\hat{f}}(z)=\sum_{1\le i<j\le k+2}A_{ij}d\log(z_i-z_j),$$

をみたす、ここで $\hat{f}={}^t(f_0,f_1,\dots,f_k)$, $f_0=F_D(\alpha,\beta,\gamma;z)$, $f_i=z_i\frac{\partial f_0}{\partial z_i}$ $(1\le i\le k)$, $z_{k+1}=0$, $z_{k+2}=1$, $(k+1)\times(k+1)$-行列 A_{ij} は以下で与える。

$$A_{ij}=\begin{array}{c} \\ 0\text{-}th \\ \\ i\text{-}th \\ \\ j\text{-}th \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0\text{-}th & \quad & i\text{-}th & \quad & j\text{-}th \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} & & & & \\ & & & & \\ & & -\beta_j & & \beta_i \\ & & & & \\ & & \beta_j & & -\beta_i \\ & & & & \end{array}\right) \end{array}\ (1\le i<j\le k),$$

$$A_{i,k+1} = \begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{ccccc} \text{0-}th & & i\text{-}th & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{0-}th \\ \\ \\ \\ \\ i\text{-}th \\ \\ \\ \\ \end{array} & \left(\begin{array}{ccc} & 1 & \\ & -\beta_1 & \\ O & \vdots & O \\ & -\beta_{i-1} & \\ & 1-\gamma+\sum\limits_{1\le j\le k}^{j\ne i}\beta_j & \\ & -\beta_{i+1} & \\ O & \vdots & O \\ & -\beta_k & \end{array}\right) \end{array} \quad (1 \le i \le k),$$

$$A_{i,k+2} = \begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{cccccccc} \text{0-}th & & & & i\text{-}th & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{0-}th \\ \\ i\text{-}th \\ \\ \end{array} & \left(\begin{array}{cccccccc} & & O & & & & O & \\ -\alpha\beta_i & -\beta_i & \cdots & -\beta_i & \gamma-\alpha-\beta_i-1 & -\beta_i & \cdots & -\beta_i \\ & & O & & & & O & \end{array}\right) \end{array}$$

$(1 \le i \le k)$.

7. F_D の変換公式

Theorem 6 2変数 F_D に対して、以下が成立する

$$\left(\frac{1+z_1+z_2}{3}\right)^p F_D\left(\frac{p}{3},\frac{p+1}{6},\frac{p+1}{6},\frac{p+1}{2};1-z_1^3,1-z_2^3\right)$$
$$= F_D\left(\frac{p}{3},\frac{p+1}{6},\frac{p+1}{6},\frac{p+5}{6};z_1',z_2'\right),$$

ここで $z=(z_1,z_2)$ は $(1,1)$ の近傍の元で、$(\frac{1+z_1+z_2}{3})^p$ は $(1,1)$ において値 1 をとるとし

$$z_1'=\left(\frac{1+\omega z_1+\omega^2 z_2}{1+z_1+z_2}\right)^3,\quad z_2'=\left(\frac{1+\omega^2 z_1+\omega z_2}{1+z_1+z_2}\right)^3,$$

とする、また $\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ である。

この公式で $p = 1$ の場合は、小池健二氏(山梨大教育)と志賀弘典氏(千葉大理)により発見された。

Theorem 7 2変数 F_D に対して、以下が成立する

$$
\begin{aligned}
&(z_1z_2)^{\frac{1-p}{2}}\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)^p F_D\left(\frac{3+p}{4},\frac{1+p}{4},\frac{1+p}{4},\frac{3+3p}{4};1-z_1^2,1-z_2^2\right)\\
&\qquad = F_D\left(p,\frac{1+p}{4},\frac{1+p}{4},\frac{3+3p}{4};1-\frac{z_1(1+z_2)}{z_1+z_2},1-\frac{z_2(1+z_1)}{z_1+z_2}\right),
\end{aligned}
$$

ここで $z=(z_1,z_2)$ は $(1,1)$ の近傍の元で、$(z_1z_2)^{\frac{1-p}{2}}$ と $\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)^p$ は $(1,1)$ においてともに値 1 をとる。

Theorem 8 3変数 F_D に対して、以下が成立する

$$\left(\frac{1+z_1+z_2+z_3}{4}\right)^{\frac{p}{2}} F_D\Big(\frac{p}{4},\frac{p+2}{12},\frac{p+2}{12},\frac{p+2}{12},\frac{p+2}{3};1-z_1^2,1-z_2^2,1-z_3^2\Big)$$
$$= F_D\Big(\frac{p}{4},\frac{p+2}{12},\frac{p+2}{12},\frac{p+2}{12},\frac{p+5}{6};z_1',z_2',z_3'\Big),$$

ここで (z_1,z_2,z_3) は $(1,1,1)$ の近傍の元で、$(\frac{1+z_1+z_2+z_3}{4})^{p/2}$ は$(1,1,1)$ において 値 1 をとるとし、

$$\begin{aligned}
z_1' &= \Big(\frac{1-z_1-z_2+z_3}{1+z_1+z_2+z_3}\Big)^2 = 1-\frac{4(1+z_3)(z_1+z_2)}{(1+z_1+z_2+z_3)^2},\\
z_2' &= \Big(\frac{1-z_1+z_2-z_3}{1+z_1+z_2+z_3}\Big)^2 = 1-\frac{4(1+z_2)(z_1+z_3)}{(1+z_1+z_2+z_3)^2},\\
z_3' &= \Big(\frac{1+z_1-z_2-z_3}{1+z_1+z_2+z_3}\Big)^2 = 1-\frac{4(1+z_1)(z_2+z_3)}{(1+z_1+z_2+z_3)^2}
\end{aligned}$$

とする。

Theorems 6,7,8 は、微分方程式を計算することで証明できる。

8. 多項平均反復の共通極限

m_1, m_2, m_3 を以下で定め、$m=(m_1,m_2,m_3)$ とする。

$$
\begin{aligned}
m_1(x_1,x_2,x_3) &= \frac{x_1+x_2+x_3}{3},\\
m_2(x_1,x_2,x_3) &= \sqrt[3]{m_1(x_1,x_2,x_3)^3-\ell_2(x_1,x_2,x_3)^3},\\
m_3(x_1,x_2,x_3) &= \sqrt[3]{m_1(x_1,x_2,x_3)^3-\ell_3(x_1,x_2,x_3)^3},
\end{aligned}
$$

ここで $\ell_2(x)=\frac{x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3}{3}$, $\ell_3(x)=\frac{x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3}{3}$ とする。$a>b>c>0$ に対して、3 重数列 (a_n,b_n,c_n) を $m^n(a,b,c)$ で定める。

Theorem 9 (Koike-Shiga) 3 重数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ は収束し、共通極限 $m_*^\infty(a,b,c)$ をもつ。それは 2 変数 F_D で下記のように表示できる。

$$
m_*^\infty(a,b,c)=\frac{a}{F_D(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1;1-(\frac{b}{a})^3,1-(\frac{c}{a})^3)}.
$$

３種類の３項平均 m_1, m_2, m_3 を以下のように定め、$m = (m_1, m_2, m_3)$ とする。

$$
\begin{aligned}
m_1(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\sqrt{x_1}(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3})}{2}, \\
m_2(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\sqrt{x_2}(\sqrt{x_3}+\sqrt{x_1})}{2}, \\
m_3(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\sqrt{x_3}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})}{2}.
\end{aligned}
$$

$a > b > c > 0$ に対して、３重数列 (a_n, b_n, c_n) を $m^n(a, b, c)$ で定める。

Theorem 10 ３重数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ は収束し、共通極限 $m_*^\infty(a, b, c)$ をもつ。それは２変数 F_D で下記のように表示できる。

$$
m_*^\infty(a, b, c) = \frac{a}{F_D(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 1 - \frac{b}{a}, 1 - \frac{c}{a})}.
$$

Maple による検証

４種の４項平均 $m_1,\dots,m_4$ を以下で定め、$m=(m_1,\dots,m_4)$ とする。

$$m_1(x)=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\qquad m_2(x)=\frac{\sqrt{(x_1+x_4)(x_2+x_3)}}{2},$$
$$m_3(x)=\frac{\sqrt{(x_1+x_3)(x_2+x_4)}}{2},\quad m_4(x)=\frac{\sqrt{(x_1+x_2)(x_3+x_4)}}{2}.$$

$a>b>c>d>0$ に対して、４重数列 (a_n,b_n,c_n,d_n) を $m^n(a,b,c,d)$ で定める。

Theorem 11 ４重数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\},\{d_n\}$ は収束し、それらは共通極限 $m_*^\infty(a,b,c,d)$ をもつ。それは３変数 F_D で下記のように表示できる。

$$m_*^\infty(a,b,c,d)=\frac{a}{F_D(\frac14,\frac14,\frac14,\frac14,1;1-(\frac{b}{a})^2,1-(\frac{c}{a})^2,1-(\frac{d}{a})^2)^2}.$$

Maple による検証

Remark 2 *1876*年に *C.W. Borchardt* は下記の４種平均で得られる４重数列を考察している。

$$m_1(x) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \quad m_2(x) = \frac{\sqrt{x_1 x_4} + \sqrt{x_2 x_3}}{2},$$
$$m_3(x) = \frac{\sqrt{x_1 x_3} + \sqrt{x_2 x_4}}{2}, \quad m_4(x) = \frac{\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_3 x_4}}{2}.$$

これらの平均はテータ関数の公式から自然と導かれるものである。

References

[B] C.W. Borchardt, Über das arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen, *Berl. Monatsber,* **53** (1876), 611-621.

[BB1] J.M. Borwein and P.B. Borwein, A cubic counterpart of Jacobi's identity and the AGM, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **323**(2) (1991), 691–701.

[BB2] J.M. Borwein and P.B. Borwein, *Pi and the AGM* (Reprint of the 1987 original), A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, Toronto, 1998.

[C] B.C. Carlson, Algorithms involving arithmetic and geometric means, *MAA Monthly*, **78**(5) (1971), 496-505.

[E] A. Erdeélyi, *Higher Transcendental Functions*, volume I, Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, Florida, 1981.

[G] E.M. Goursat, Sur l'Équation Différentielle Linéaire qui Admet pour Intégrale la Série Hypergéométrique, *Ann. Sci. l'Ecole Normale Sup.* (2) **10** (1881), 3–142.

[HKM] R. Hattori, T. Kato and K. Matsumoto, Mean iterations derived from transformation formulas for the hypergeometric function, *preprint* 2008.

[IKSY] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida, *From Gauss to Painlevé*, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1991.

[KM] T. Kato and K. Matsumoto, The common limit of a quadruple sequence and the hypergeometric function F_D of three variables, *preprint*, 2007.

[KS1] K. Koike and H. Shiga, Isogeny formulas for the Picard modular form and a three terms arithmetic geometric mean, *J. Number Theory*, **124** (2007), 123–141.

[KS2] K. Koike and H. Shiga, Extended Gauss AGM and corresponding Picard modular forms, *J. Number Theory*, **128** (2008), 2097–2126.

[MM] D.V. Manna and V.H. Moll, Landen survey, *Probability, Geometry and Integrable Systems*, 287-319, MSRI Publications **55**, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[MO] K. Matsumoto and K. Ohara, Some transformation formulas for Lauricella's hypergeometric functions F_D, to appear in *Funkcial. Ekvac.*

[MS] K. Matsumoto and H. Shiga, A variant of Jacobi type formula for Picard curves, *preprint*, 2008.

[MT] K. Matsumoto and T. Terasoma, Arithmetic-geometric means for hyperelliptic curves and Calabi-Yau varieties, to appear in *Internat. J. of Math.*

[Ma] K. Matsumoto, A transformation formula for Appell's hypergeometric function F_1 and common limits of triple sequences, *preprint*, 2008.

[Me] J.F. Mestre, Moyenne de Borchardt et intégrales elliptiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **313** (1991), 273–276.

[O] K. Ohara, yang — a package for computation in the ring of differential-difference operators, http://www.openxm.org, 2007.

[U] H. Umemura, 楕円関数論 -楕円曲線の解析学-, University of Tokyo Press, Tokyo, 2000.