2 変数多項式に付随する logarithmic cohomology groups の計算

F.Castro-Jimenez, 高山信毅

2008 年 1 月 7 日, arxiv.org/abs/0712.0001

どんな cohomology 群が
計算機で計算可能なのか？

1. holonomic D-**加群の制限**: $D/x_1 D \otimes_D M$ [Oaku, 1997]
2. deRham cohomology **群**: $H^i(\mathbb{C}^n \setminus V(f), \mathbb{C})$ [Oaku-T; 1999]
3. $\mathrm{Ext}^i_D(M, N)$ [Tsai-Walther; 2001], ...

主定理

Theorem

$f \in \mathbf{Q}[x,y]$, 多重度がない. $H^i((\Omega^\bullet(\log f), d))$ の $\mathbb{C}$ ベクトル空間としての base が計算機で計算できる.

Theorem (K.Saito, 1980. —)

$\Omega^1(\log f)$ は rank 2 の $R = \mathbb{C}[x,y]$ 自由加群であり, その生成元 ω_1, ω_2 は Quillen-Suslin のアルゴリズムで計算できる.

A. Fabianska, QuillenSuslin package,
`http://wwwb.math.rwth-aachen.de/QuillenSuslin/`
黒板で説明したアイディアを復習しながら上のアルゴリズムの概略を (technical).

例 1 (論文の Example 3.2)

入力: $f = xy(x-y)$
出力:

$$\omega_1 = x(x-y)dy/f, \ \omega_2 = (-ydx + xdy)/f$$

$$H^2 = \mathbb{C}x\omega_1 \wedge \omega_2, \ \mathbb{C}y\omega_2 \wedge \omega_2$$

$$H^1 = \mathbb{C}\omega_1 + \mathbb{C}x\omega_2 + \mathbb{C}y\omega_2$$

$$H^0 = \mathbb{C} \cdot 1$$

Macaulay 2, `logCohomology`. **その他**

準備

$\Omega(2) = D/(\partial_x D + \partial_y D)$.
$\Omega(2)^\bullet$ を $\Omega(2)$ の右 D-加群としての自由分解.

$$D \longrightarrow D^2 \longrightarrow D \longrightarrow \Omega(2) \to 0$$

$c \mapsto (\partial_x c, \partial_y c)^T,\ (a, b)^T \mapsto -\partial_y a + \partial_x a$

補助定理 (アルゴリズム) 1

$I = D \cdot \{\delta_1 + \delta_1 \cdot f/f, \delta_2 + \delta_2 \cdot f/f\}$ (黒板の I^*)

Theorem (cf. Calderon-Moreno, 1999. Castro-Ucha, 2001)

$$H^i(\Omega^\bullet(\log f)) \simeq H^i(\Omega(2)^\bullet \otimes_D D/I)$$

$$H^0 \quad : \quad g \mapsto 1 \otimes gf$$

$$H^1 \quad : \quad c_1\omega_1 + c_2\omega_2 \mapsto c_1 f\omega_1 + c_2 f\omega_2$$

ただし右側は対応 $dx \leftrightarrow (1,0)^T \otimes 1, dy \leftrightarrow (0,1)^T \otimes 1$ で右の複体にあらわる加群の元とみなす.

$$H^2 \quad : \quad g\omega_1 \wedge \omega_2 \mapsto g \otimes f\omega_1 \wedge \omega_2$$

補助定理 (アルゴリズム) 2

$A^\bullet$ を D/I の $(1,1,-1,-1)$-adapted 自由分解とする.

Theorem (Oaku-T, 2001. Integration algorithm)

$H^i(\Omega(2)\otimes_D A^\bullet)$ の $\mathbb{C}$-ベクトル空間としての base が計算可能.

Theorem (U.Walther, 2001. Transfer algorithm)

$$H^i(\Omega(2)\otimes_D A^\bullet) \simeq H^i(\Omega(2)^\bullet \otimes_D D/I)$$

の q.i.s. を Gröbner basis を用いて計算可能.

(double complex をつくり左から右へ "転送" する.)

例続き, Example 3.2

$f = xy(x-y)$. $I = \widetilde{Der_R}(\log f)$ の二つの生成元 :

$$\ell_1 = 3 + x\partial_x + y\partial_y,\ \ell_2 = -(2x-y) + (-x^2+xy)\partial_x$$

$$A^\bullet : \qquad A_2[0] \xrightarrow{a^{-2}} A_2[1] \oplus A_2[0] \xrightarrow{a^{-1}} A_2[1]$$

ここで

$$\begin{aligned} a^{-2}(c) &= c(-\ell_2, \ell_1 - 1) \quad \text{for } c \in A_2 \\ a^{-1}(c,d) &= (c,d)\begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix} \quad \text{for } (c,d) \in A_2[1] \oplus A_2[0] \end{aligned}$$

(1) b-function criterion(黒板) で有限次元ベクトル空間の complex へ.
(2) $A^\bullet$ と $\Omega(2)^\bullet$ から double complex をつくり transfer algortim で移す.

どのくらいの大きさの計算ができるのか? Example 4.1

$f = (x^3 + y^4 + xy^3)(x^2 + y^2)$

A set of generators of syzygies of f, f_x, f_y: $S = \begin{pmatrix} S_{11} & a_{11} & a_{12} \\ S_{21} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

ここで $S_{11} = (115/6y - 5/2)x - 6y^3 - 43/6y^2 + 9y$,

$a_{11} = (-23/6y + 1/2)x^2 + (y^3 + y^2 - 2y)x - 5/6y^3$,

$a_{12} = (1/3y + 1/2)x^2 + (-3y^2 + 1/2y)x + y^4 + 4/3y^3 - 3/2y^2$,

$S_{21} = 46/15x^2 + (-24/25y^2 + 22/75y)x + 12/5y^2$.

$a_{21} = -46/75x^3 + (4/25y^2 - 2/25y)x^2 - 8/15y^2x$,

$a_{22} = 4/75x^3 - 12/25yx^2 + (4/25y^3 - 2/75y^2)x - 2/5y^3$,

この時 $\omega_1 = \frac{1}{f}(a_{22}dx - a_{21}dy)$ $\omega_2 = \frac{1}{f}(-a_{12}dx + a_{11}dy)$.

(1) $H^0(\Omega^\bullet(\log f)) \simeq \mathbb{C}\cdot 1$.

(2) $H^2(\Omega^\bullet(\log f)) \simeq$

$(\mathbb{C}\cdot 1 + \mathbb{C}\cdot(-x) + \mathbb{C}\cdot y^3 + \mathbb{C}\cdot(-xy^3) + \mathbb{C}\cdot xy^2 + \mathbb{C}\cdot x^3y + \mathbb{C}\cdot y^4)\,\omega_1 \wedge \omega_2$

(3) $H^1(\Omega^\bullet(\log f))$ is spanned by

- $-yx\omega_1 - 4/25x^2\omega_2$
- $((215/28y - 1101/280)x - 367/56y^2)\omega_1 + (43/35x^2 - 367/350yx)\omega_2$
- $((y - 11/30)x - 28/9y^3 - 13/6y^2 + 14/3y)\omega_1$
  $+(4/25x^2 + (-112/225y^2 + 2/5y)x + 56/45y^2)\omega_2$

どのくらいの大きさの計算ができるのか? Example 4.2

We apply a part of our algorithm to compute the dimensions of the cohomology groups $H^i(\Omega^\bullet(\log f))$ for $f = x^p + y^q + xy^{q-1}$ (Reifen singularity). Here is a table of p, q and the dimensions of H^2, H^1, H^0 and timing data.

p	q	Dimensions	Timing in seconds
10	11	(8,1,1)	3.5
10	12	(9,1,1)	4.6
10	13	(10,1,1)	6.9
10	14	(11,1,1)	9.4
10	20	(17,1,1)	55.0
10	21	(18,1,1)	86.8

The program is executed on a machine with 2G RAM and Pentium III (1G Hz).

超幾何積分との関係

1. logCohomology は deRham より大きい例が計算できる.
2. logCohomology と deRham が一致するとき logCohomology の方がいい base を出力してくれる.
3. twisted 版 logCohomology, まだやってない.
4. どんな特異点にたいして超幾何積分を調べると面白い現象が現れるか?