多重ゼータ値の生成する空間の次元予想について

金子 昌信 (九州大学), 野呂 正行 (神戸大学), 鶴巻 健一 (日本オラクル (株))

多重ゼータ値 (Multiple Zeta Value; MZV)

$$\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 > \cdots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_n^{k_n}}$$

($k_1, \ldots, k_n \in$ **N**, $k_1 \geq 2 \leftarrow$ 収束のための条件)

$k_1 + \cdots + k_n$: $\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ の weight

MZV は数学, 物理のさまざまな場面に現れる：幾何学, 結び目理論, 数理物理, 数論幾何, ...

ここでは, 特に MZV が **Q** 上生成する線形空間を扱う

Zagier 予想

$\mathcal{Z}_k$: weight k の MZV (全部で 2^{k-2} 個) が $\mathbf{Q}$ 上生成する線形空間

MZV の間にはさまざまな関係式がある $\Rightarrow \dim_{\mathbf{Q}} \mathcal{Z}_k$ は意外に小さい

予想 (D. Zagier)

$\dim_{\mathbf{Q}} \mathcal{Z}_k = d_k$

$d_2 = d_3 = d_4 = 1$, $d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$ $(k \geq 5)$.

k	14	15	16	17	18	19	20
d_k	21	28	37	49	65	86	114
2^{k-2}	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144

MZV の数値計算プログラム (Zagier)

Zagier は, MZV の数値計算結果から, $\mathbf{Q}$ 上の線形関係を推測したらしい.

```
\p 200;
zmult(v,l,s)=t=length(v);ze=vector(s,n,1);\
    b=vector(l,m,0);b[1]=1.;h=-1;\
    for(r=1,t,j=v[r];h=h+j-1;z=0.;q=1./s^h;\
    for(m=1,l,q=q/s;b[m]=sum(n=1,m-1,\
    -binomial(h+m,m-n+1)*b[n],b[m])/(h+m);\
    z=z+b[m]*q);forstep(m=s,1,-1,\
    z1=z+ze[m]/m^j;ze[m]=z;z=z1));z
mz(v)=zmult(v,100,1000);
```

知られている結果

定理 (Goncharov, Terasoma)

$\dim_{\mathbf{Q}} \mathcal{Z}_k \leq d_k$ (Mixed Tate Motif を用いた証明)

注意

等号を示すのは当面無理と考えられている (MZV の線形独立性を示す必要あり)

我々の興味

- どのような関係式の集合が次元の上限を与えるか
- どのような MZV の集合が $\mathcal{Z}_k$ を生成するか

MZV の積 – 級数表示による分解

MZV の積の級数による分解 = 調和積

$$\zeta(2)^2 = \left(\sum_{m>0} \frac{1}{m^2}\right)\left(\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}\right) = \sum_{m,n>0} \frac{1}{m^2 n^2}$$

$$= \left(\sum_{m>n>0} + \sum_{n>m>0} + \sum_{m=n>0}\right) \frac{1}{m^2 n^2}$$

$$= 2\zeta(2,2) + \zeta(4)$$

MZV の積 – 積分表示による分解

MZV の積の積分による分解 = シャッフル積

$$\zeta(2)^2 = \left(\iint\limits_{1>t_1>t_2>0} \frac{dt_1 dt_2}{t_1(1-t_2)} \right) \left(\iint\limits_{1>t_1'>t_2'>0} \frac{dt_1' dt_2'}{t_1'(1-t_2')} \right)$$

$$= \iiiint\limits_{\substack{1>t_1>t_2>0 \\ 1>t_1'>t_2'>0}} \frac{dt_1 dt_2 dt_1' dt_2'}{t_1(1-t_2)t_1'(1-t_2')}$$

$$= 4 \iiiint\limits_{\substack{1>s_1>s_2 \\ >s_3>s_4>0}} \frac{ds_1 ds_2 ds_3 ds_4}{s_1 s_2 (1-s_3)(1-s_4)} + 2 \iiiint\limits_{\substack{1>s_1>s_2 \\ >s_3>s_4>0}} \frac{ds_1 ds_2 ds_3 ds_4}{s_1(1-s_2)s_3(1-s_4)}$$

$$= 4\zeta(3,1) + 2\zeta(2,2)$$

複シャッフル関係式

MZV の積 : 2 種類の方法で, MZV の線形和に書ける

一般に, シャッフル積 $\neq$ 調和積なので, MZV の関係式が得られる

$$\zeta(2)^2 = 2\zeta(2,2) + \zeta(4) = 4\zeta(3,1) + 2\zeta(2,2)$$

$$\zeta(4) = 4\zeta(3,1)$$

$\Rightarrow$ (有限) 複シャッフル関係式 (Finite Double Shuffle Relation; FDS)

$\Rightarrow$ FDS だけでは $\dim \mathcal{Z}_k \leq d_k$ を達成できない

Hoffman による代数化

$\mathfrak{H} = \mathbf{Q}\langle x, y\rangle$: 非可換 2 変数多項式環

$\mathfrak{H}^1 = \mathbf{Q} + \mathfrak{H}y$

(y で終る単項式で生成される部分環)

$\mathfrak{H}^0 = \mathbf{Q} + x\mathfrak{H}y$

(x で始まり y で終る単項式で生成される部分環)

evaluation map $Z : \mathfrak{H}^0 \to$ **R** を次で定義する:

$$Z(x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y\cdots x^{k_n-1}y) = \zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n).$$

積 $*$

$z_k = x^{k-1}y$ とおき, $\mathfrak{H}^1$ における積 $*$ を

$$\begin{aligned} 1 * w &= w * 1 = w \\ z_k w_1 * z_l w_2 &= z_k(w_1 * z_l w_2) + z_l(z_k w_1 * w_2) \\ &+ z_{k+l}(w_1 * w_2) \end{aligned}$$

で定めると, $\mathfrak{H}^1$ は $*$ に関して可換環

$$Z(w_1 * w_2) = Z(w_1)Z(w_2) \quad (w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^0_{\text{Ш}})$$

積 $ш$

$\mathfrak{H}$ における積 $ш$ を

$$1 ш w = w ш 1 = w$$

$$u w_1 ш v w_2 = u(w_1 ш v w_2) + v(u w_1 ш w_2)$$

で定めると $\mathfrak{H}$ は $ш$ に関して可換環 ($\mathfrak{H}_ш$ と書く) で,

$$Z(w_1 ш w_2) = Z(w_1) Z(w_2) \quad (w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^0_ш)$$

$\mathfrak{H}^1$ と $\mathfrak{H}^0$ はこの積に関して部分環($\mathfrak{H}^1_ш$, $\mathfrak{H}^0_ш$ と書く)

$$\Rightarrow \mathfrak{H}^1_ш \simeq \mathfrak{H}^0_ш [y]$$

一般複シャッフル関係式

正規化写像　$\mathrm{reg}_{ш} : \mathfrak{H}^1_{ш} \to \mathfrak{H}^0_{ш}$ を次で定義:

$$\mathrm{reg}_{ш} : \sum_{i=0}^{n} w_i ш y^{ш i} \mapsto w_0$$

$\Rightarrow Z\big(\mathrm{reg}_{ш}(w_1 ш w_0 - w_1 * w_0)\big) = 0 \quad (w_1 \in \mathfrak{H}^1, w_0 \in \mathfrak{H}^0)$

(一般複シャッフル関係式; Extended DSR (EDS))

- EDS は FDS を含む
- $Z(y ш w_0 - y * w_0) = 0$　(Hoffman の関係式)
  $Z(y) = \zeta(1) \Rightarrow$ 発散級数を用いた関係式

予想

<u>予想 1</u> (Ihara,Kaneko,Zagier)

weight k の EDS 全体が, $\mathcal{Z}_k$ の全関係式を与える.

<u>予想 1'</u> (Minh, Petitot)

FDS と Hoffman の関係式で, $\dim \mathcal{Z}_k \leq d_k$ が示せる.

Minh, Petitot : $k = 16$ まで確かめた

Espie, Novelli, Racinet : $k = 19$ まで確かめた (ただし, k が偶数の場合には modulo π^2 の冪で)

ここでは, さらに $k = 20$ まで確かめた. その過程で, より精密な予想を得た (後述).

実装 1 : $\mathbf{Q}\langle x, y\rangle$ の Asir への組み込み

- データ型

  単項式はビット列として表現 ($x = 1$, $y = 0$) $\Rightarrow$ 積は結合, 比較も容易.

- 入力

  入力式を木構造として保持できる `QUOTE` 型から変換する関数 `qt_to_nbp(`f`)` を用意

- 演算

  加減乗算, シャッフル積 `shuffle_mul(`f`,`g`)`, 調和積 `harmonic_mul(`f`,`g`)`, その他, 単項取り出しなど.

実装 2 : EDS, 行列の生成, rank 計算

- EDS

  組み込み関数を用いて, Asir 言語により生成

- 行列生成

  $\mathfrak{H}^0$ 中の weight k の単項式を辞書式順序でならべたものを基底とし, EDS の各関係式の係数を取り出して行列化

- rank 計算

  単なる Gauss 消去だが, k が大きくなるとサイズが指数的に増える

  $\Rightarrow$ 種々のテクニックが必要

前処理 1 : 行列サイズの縮小

weight k の FDS は次の集合で構成される :

$$F_i^{(k)} = \{w_1 ш w_2 - w_1 * w_2 \mid w_1 \in \mathfrak{M}_i^0, w_2 \in \mathfrak{M}_{k-i}^0\}$$

($\mathfrak{M}_i^0$ は, weight i の単項式 $\in \mathfrak{H}_ш^0$ 全体)

weight k の FDS+Hoffman の行列 : 横幅 2^{k-2} の縦長行列 (k が大きいと縦に伸びる)

$\Rightarrow$ できれば関係式を減らして正方行列にしたい

$\Rightarrow$ 実験の結果 FDS としては, $F_2^{(k)}$, $F_3^{(k)}$ で十分そう

新たな予想

weight k の Hoffman の関係式全体 (2^{k-3} 個ある) を $E^{(k)}$ と書く.

<u>予想 2</u>　$R^{(k)} = E^{(k)} \cup F_2^{(k)} \cup F_3^{(k)}$ により, $\dim \mathcal{Z}_k \leq d_k$ が示せる.

- $|R^{(k)}| = 2^{k-2}$ なので, 行列は正方行列となり都合よい (d_k が小 $\Rightarrow$ これ以上減らすのは無理そう)
- $\zeta(1), \zeta(2), \zeta(3), \zeta(2,1)$ をかけて得られる EDS が $R^{(k)}$ である (しかも $\zeta(3) = \zeta(2,1)$).

前処理 2 : $E^{(k)}$ による前処理

$E^{(k)}$ の各元の項数は $k-1$ で, 係数は ± 1

辞書式順序での単項式基底のもとでは左半分が上三角

$\Rightarrow$ sparse elimination により前処理して, 行列サイズを $2^{k-3} \times 2^{k-3}$ にできる

この行列を $S^{(k)}$ と書くと, 示したいことは

$$\mathrm{rank}(S^{(k)}) \geq 2^{k-3} - d_k$$

有限体上での計算

もとの行列の成分は 1 ワード整数で収まるが, 結果は多倍長

知りたいのは rank の下限

$\Rightarrow$ 素数 p に対し
$\mathrm{rank}(S^{(k)}) \geq \mathrm{rank}(S^{(k)} \bmod p)$ だから, 有限体上で rank 計算すれば大抵 OK

$\Rightarrow p = 31991, 16381$ (2 バイト整数) で行う.

さらに前処理

$k = 20$ の場合, 有限体上でも $S^{(20)}$ を保持するのに 32GB のメモリが必要

つらいので, さらに前処理を試みる

$S^{(k)}$ を見ると, ある $1/4 \cdot 2^{k-3}$ 行が sparse で, 左 1/4 が上三角

$\Rightarrow$ これで掃き出すとサイズが

$3/4 \cdot 2^{k-3} \times 3/4 \cdot 2^{k-3}$ の行列が残る

$k = 20$ の場合, 18GB

実装 3 : MPI による分散並列計算

サイズからみて, 1 CPU でやるのは無謀

⇒ ScaLAPACK は有限体をサポートしていないので, 自前で MPI プログラムを書いた (ブロック化をしない, ごく簡単なもの)

- 野呂版 : 1 次元 cyclic 分割
  行を順に分散 ⇒ やさしい
- 鶴巻版 : 2 次元 cyclic 分割
  列方向にも分散 ⇒ むずかしい

計算環境

1. Linux PC クラスタ
   (3 GB +古い Athlon 2 個) $\times$ 6 台
2. SPARC SMP (木村欣司氏のご協力による)
   512GB+SPARC 32CPU
3. Macintosh
   16GB+Intel XEON 5160 $\times 2$ (4core)
4. Linux SMP (横山和弘氏のご協力による)
   32GB+Intel XEON X5355 $\times 2$ (8core)

計算結果 (環境 4. による)

k	16	17	18	19	20
d_k	37	49	65	86	114
2^{k-3}	8192	16384	32768	65536	131072
$\mathrm{rank}(S^{(k)} \bmod p)$	8155	16335	32703	65450	130958
$2^{k-3} - \mathrm{rank}(S^{(k)} \bmod p)$	37	49	65	86	114
EDS 生成 (1CPU)	22sec	85sec	4.5min	11min	30min
前処理 (1CPU)	5sec	19sec	1.5min	9min	57min
rank 計算 (8CPU)	2min	13min	1.3hour	9hour	67hour
所要メモリ量	72MB	288MB	1.2GB	4.6GB	18GB

以上により予想 2 が(したがって予想 1' も) $k = 20$ まで検証できた.

文献

A. B. Goncharov, Periods and mixed motives, preprint (2002).

M. Hoffman, M., The algebra of multiple harmonic series, J. Algebra **194** (1997), 477–495.

K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, Compositio Math. **142-02** (2006), 307–338.

M. Kaneko, M. Noro and K. Tsurumaki, On a conjecture for the dimension of the space of the multiple zeta values, to appear in Software for Algebraic Geometry, IMA Volumes in Mathematics and its Applications **148**, Springer.

文献(つづき)

M. Espie, J-C. Novelli, and G. Racinet, Formal computations about multiple zeta values, in “From Combinatorics to Dynamical Systems” (Strasbourg, 2002), IRMA Lect. Math. Theor. Phys. 3, F. Fauvet and C. Mitschi (eds.), de Gruyter, Berlin, (2003), 1–16.

T .Terasoma, Mixed Tate motives and multiple zeta values, Invent. Math. **149** (2002), 339–369.

D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, in ECM volume, Progress in Math., **120** (1994), 497-512.