2009 6/18月. 13:40〜.

§3. 非ユークリッド幾何

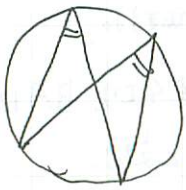
2006-06-09-non. のノート.

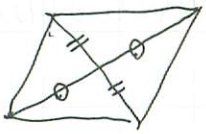
0:00 ビデオ1.

(Euclid geometry)

BC 300年頃.

ユークリッド著.
幾何学原論.





定義、公理
(definition) (axiom)
定理.
(theorem)

定義、公理、証明ずみ定理
以外は、使用禁止. あとは論理だけでやる。

1+2=3 を証明せよ.
どんどんさかのぼる。とまらなくなる。
これ以上"証明せよ"をやめる、明らかとおもえる事実.

5:26

プリントの公理系をみてみよう。

公理の例.

1. 異なる2点をとおる直線は1つあってただひとつ。

他の定理を証明するときは、これらの公理、定義(のみ)より証明せよ。なんでも証明せよ。

論理がからだとつらいから、中学生の頃は、公理等は考えない。

点とは何か?
直線とは何か?

9:45 こういったものは、定義しない。無定義用語.

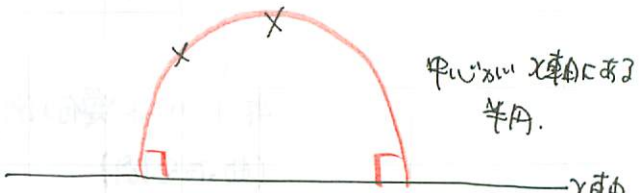
ただし公理の性質はみたす。

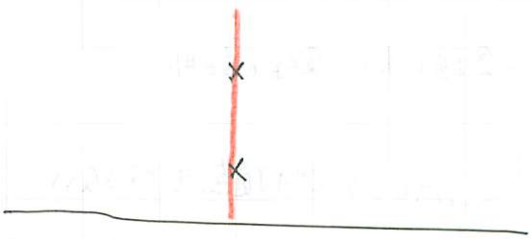
19C, 20Cのヒルベルト. (Hilbert)

点 : コップ.
直線 : 机.

12:00 例

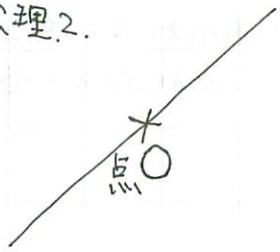
点は今までの点. (x, y) ただし y>0.





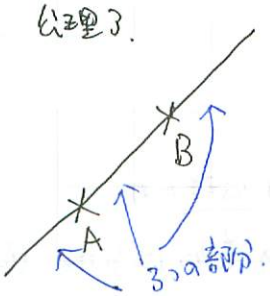
これらも、"直線"とよぶ。さっきの公理をみたす。

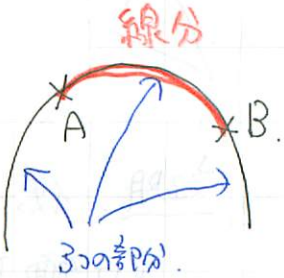
14:40 公理2.



公理2もOK.

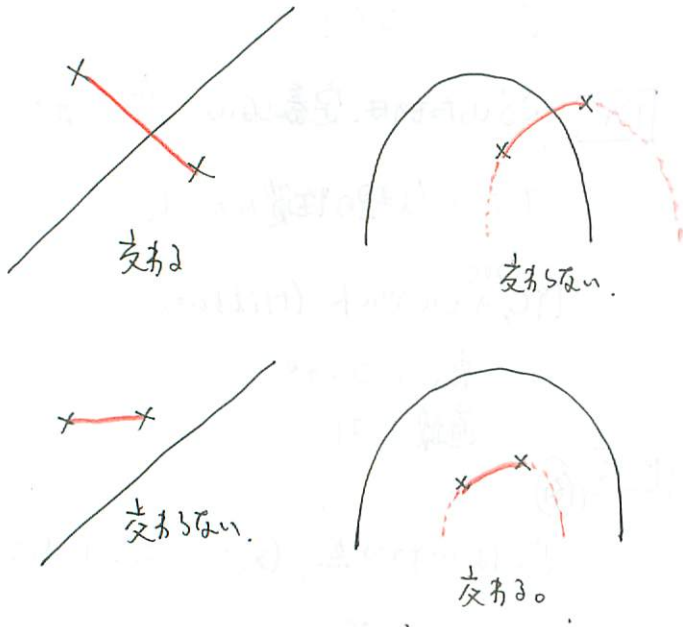
公理3.





17:30

平面 $\{(x,y) \mid y>0\}$ は直線で → 定義.
2つの部分に分けられる。



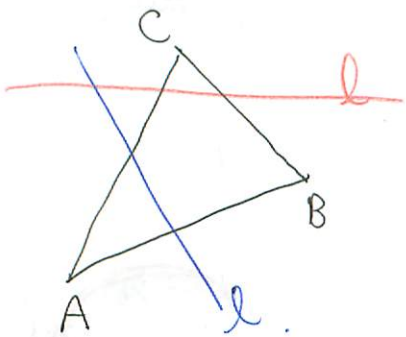
非ユークリッド幾何の例
(曲った空間)

20:40

以上を念頭において定理を証明

定理1. △ABCのどの頂点もとおらない直線 l が辺ACと交わるとき、l はABかBC. どちらか一方だけと交わる。

三角形の定義. 同一直線上にない3点, A,B,C.
線分. AB, BC, CAのつくる図形.



23:31 証明. 使っていいのは公理だけ

l は平面を2つの部分に分ける. (公理4)

l はACと交わるので、AとCは別の側にある。(公理4)

場合1.
Bが Aの側のとき.

場合2.
Bが Cの側にあるとき.

どちらか一方だけがおきる。

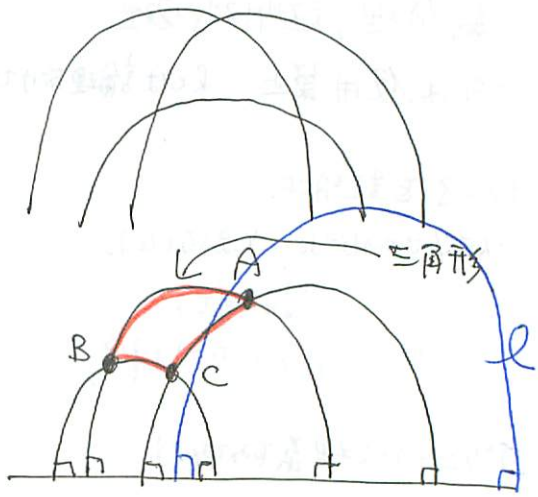
場合1.のとき. 公理4より、BAは l とまじわらず、BCは l と交わる。

場合2のとき. 公理4より. BCは l と交わらず、BAは l と交わる。

証明終.

29:12

非ユークリッド幾何でもO.K.



たしかに正しい。

公理的方法

32:27 線型空間の公理
(ベクトル空間)

公理の性質をみたせばよい。

連続関数全体だって. 線型空間.

抽象化, 証明の節約.

34:19

このような方法論をみたつけよう。

人間にとっては、2000年位の考えかたのほうが

2006-06-16-non-2より

0:00 ビデオ2.

非ユークリッド幾何(後半)

初等幾何の公理的方法では

直線, 平面, 点 は無定義用語.

公理をみたせば、何でもいい.

02:00

公理1. 異なる2点をとおる直線は

1つあってただ1つ。

前回やったのは、上半空間の非ユークリッド幾何

平面 : $\{(x,y) \mid y>0\}$

直線 : $x=c$ か. $(x-a)^2+y^2=r^2$, $y>0$, $r>0$ ← タイプII.

タイプI　をみたす (x,y) 全体.

座標幾何で、公理1をたしかめてみよう。

2点の座標を (p,q), (p',q') とおく。(異なる点)

場合1. $p=p'$ のとき. $(q \neq q')$.

$\{(x,y) \mid x=p=p',\ y>0\}$ が求める

ただ1つの直線.

場合2. $p \neq p'$ のとき.

a と r^2 が計算でただ1とおりに

きまるか?

$$\begin{cases} (p-a)^2+q^2=r^2 & \text{—①} \\ (p'-a)^2+q'^2=r^2. & \text{—②} \end{cases}$$

9:10

①−② を計算.

$$p^2-p'^2-2a(p-p')+q^2-q'^2=0.$$

$$2a(p-p')=p^2-p'^2+q^2-q'^2.$$

$p-p' \neq 0$ なので.

$$a=\frac{p^2-p'^2+q^2-q'^2}{2(p-p')}.$$

a を①に代入して r の値もきまる.

11:45

存在. (a と r)

一意性. (a と r がただ1つにきまる)

公理1をこのモデルはみたしている。

◎ ここで考えている2本の直線は2点以上の

異なる

交点をもたない。

このモデルで証明.

タイプIとタイプII. 明らか.

タイプIとI. 交点なし.

タイプIIとII.

15:00

$$L_1=\{(x,y) \mid (x-a)^2+y^2=r^2,\ y>0\} \quad \text{①}$$

$$L_2=\{(x,y) \mid (x-a')^2+y^2=r'^2,\ y>0\} \quad \text{②}$$

①−② を計算

$$-2x(a-a')+a^2-a'^2=r^2-r'^2.$$

異なる直線なので2つの場合あり.

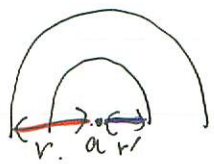
$a \neq a'$ のとき.

上から x がただ1つにきまる。

18:20

$a=a'$ のとき.

異なるので、$r \neq r'$. 交わりなし。



20:54

公理4.をみたすことを示せ。(レポート)

平面は直線lによって2つの部分にわけられる。2点A, Bが異なる部分に属せば、線分ABはlとただ1点で交わり、同じ部分に属せば交わらず。

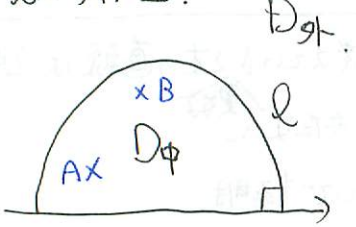
これを~~座標幾何も並用して~~示せ。
(我々のモデルで)

いろんな線分を場合わけして示す。

24:51

lがタイプI. 略.

lがタイプII.



場合わけを全部やる。

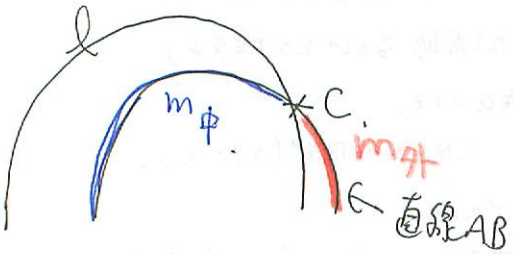
$A, B \in D_{中}$ とする。

直線ABがタイプIIの場合

直線ABとlは2点以上で交わらず。

交点なしの場合、公理4. O.K.

交点ありの場合、交点をCとする。



直線ABはCにより2つの部分に分けられる。

30:00

線分ABがlとまじわるなら、A, Bはそれぞれ別の側にないといけない。

しかし、$A, B \in D_{中}$ なので、むじゅん。

その他の場合各自考える。
A4.の紙を重ね、ホッチキス。

座標幾何でやってもよい。

33:19

前回の定理1.の証明、復習。 略.

48:00

定義. 異なる交わらない直線を平行線という。

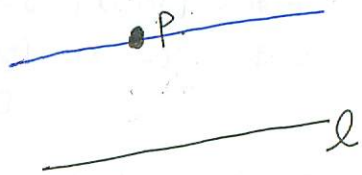
2006-6-16-non-2 より

0:00 ビデオ3.

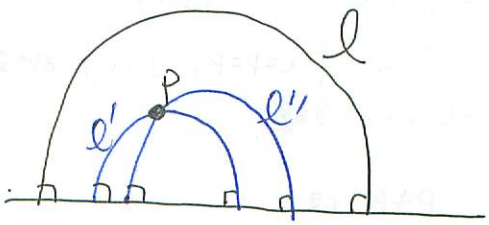
平行線公理.

ユークリッド原論より.

直線lの外に1点Pをとる。
Pをとおりlに平行な直線はただ1本存在



上半空間の非ユークリッド幾何では、この公理成立せず。



平行なものがたくさん存在。

三角形の内角の和=180°
平行線公理で証明.

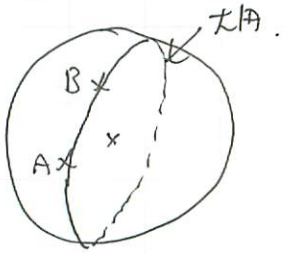
歴史的 ~19C. 平行線公理を他の公理で証明しようと努力.

みたいな幾何のモデルが
発見されて証明できないことが
わかった。

3:48

似た幾何

球面を考える。



A, B と球の中心をとおる
平面でもある。

5:49

定理

$l /\!/ m,\ m /\!/ n \Rightarrow l /\!/ n$

(!) 平行線公理。
自力で証明。 //

6:50

前回のプリントを返却。

コメント。 試験答案に書くこと。
誤解なきように。

略語。

$\wedge, \vee, \forall, \exists$ など。