

第5章 グレブナ扇と Tropical Geometry

この章で使うソフトウェア: R, 4ti2, C 言語, Asir, gfan, polymake, sm1

Todo: video://korea-tropical にプログラムのデモも加えて講義. この章は手書きノートによる.

5.1 Polytope と polymake の “いろは”

Polytope, Polyhedron, $\text{face}_w(P)$, Normal fan の詳しい導入.

数学関連事項はテキスト以外に板書でも説明. ビデオ: 2005-05-30 参照.

polymake の作者についてなど.

数学関連事項はテキスト以外に板書でも説明. ビデオ: 2005-05-30 参照.

$\text{New}(f)$ の計算には点の集合の凸包の計算が必要となる.

例 5.1 点の集合の凸包を計算し, その facet の法線ベクトルを計算せよ.

Polymake

polymake では, 入力点は原点をとらない超平面の上においておく必要がある. 下の例では $x_1 = 1$ に点をのせてある. このファイル名を p-conv0.txt とする. Et/p-conv0.txt

```
POINTS
1 0 0
1 2 0
1 0 3
1 1 1
```

```
polymake p-conv0.txt FACETS
```

と入力することにより, 次の出力ファイル (同じ名前の出力 p-dim.txt) Et/p-conv.txt

```
_application polytope
_version 2.2
_type RationalPolytope
```

POINTS

```
1 0 0
1 2 0
1 0 3
1 1 1
```

FACETS

```
0 1 0
3 -3/2 -1
0 0 1
```

AFFINE_HULL

を得る.

アルゴリズムについての覚え書き. 2次元の凸包. Edelsbruner の coloring algorithm [?]. G.Ziegler の本 [2] V 表現と H 表現の変換. Fourier-Motzkin algorithm. CDD ライブラリ [3] およびアルゴリズムの説明.

CDD ライブラリのアルゴリズムの詳細については, [3] の論文 “Double description revisited” を参照.

次元の計算. このファイル名を p-dim.txt とする. Et/p-dim0.txt

POINTS

```
1 0 0 3
1 2 0 3
1 0 3 3
1 1 1 3
```

polymake p-dim.txt DIM

と入力することにより, 次の出力ファイル Et/p-dim.txt

```
_application polytope
_version 2.2
_type RationalPolytope
```

POINTS

```
1 0 0 3
1 2 0 3
1 0 3 3
1 1 1 3
```

DIM

```
2
```

を得る.

Volume を計算するには

polymake p-dim.txt VOLUME

が必要. 計算には三角形分割が必要.

数学関連事項はテキスト以外に板書でも説明. ビデオ: 正則三角形分割, Depthlaunay, voronoi など, 2005-05-30

5.2 単独方程式の Tropical zero set

gfan

Todo: gfan の作者について.

gfan では initial term を weight と exponent の内積との最大値で定義している. われわれのノートとは反対になっているので注意しよう.

例 5.2 われわれの running example である

$$I = (x_1 + x_2 + x_3)$$

の tropical zero set を gfan で計算してみよう.

入力プログラム (t3.txt) Et/t3.txt

```
{a+b+c}
```

で生成されるイデアルの tropical zero set を計算してみよう.

gfan への入力. Et/t3.sh

```
gfan_tropicalstartingcone <t3.txt | gfan_tropicaltraverse >t3-out.txt
```

出力 Et/t3-out.txt

```
Ambient dimension: 3
Dimension of homogeneity space: 1
Dimension of tropical variety: 2
Is simplicial: true
Order of input symmetry group: 1
Number of maximal cones: 3
Modulo the homogeneity space:
{
(1,1,1)}
Rays:
{
0: (-1,0,0),
1: (1,1,0),
2: (0,-1,0)}
Printing index list for dimension 1 cones:
{
{0},

{1},

{2}}
Number of dimension 1 cones incident to each ray:
(1,1,1)
F-vector:
(3)
```

手計算のとおり 3 本の ray がある.

5.3 グレブナ扇

I を同次イデアルとする. 二つの weight vector w と w' が同値 $w \simeq w'$ であることを

$$\mathrm{in}_w(I) = \mathrm{in}_{w'}(I) \quad (5.1)$$

で定義する. w と同値な weight vector を集めたものを w できまる Gröbner cone とよび, $C(w)$ と書く. あい異なる $C(w)$ の閉包を集めたものが Gröbner fan $\bar{\mathcal{E}}(I)$ である.

$I = \langle f \rangle$ のとき, I の Gröbner fan は f の Newton 多面体の normal fan に他ならない.

例 5.3 次の頂点を持つ多面体の normal fan の第一象限の部分を図示せよ.

$$(0, 0, 0), (2, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 3, 0), (5, 5, 5), (0, 0, 1)$$

第一象限の部分のみなら, 同次式である必要はない.

gfan

gfan は tropical zero set の計算もできるが, Gröbner fan の専門計算システムとしてすぐれている. (gfan は sage ととも昨年 (2006 年) 脚光をあびた新しいソフトである)

Et/g-n.txt

```
{1+a^2+a*b+b^3+a*b*c+c}
```

入力コマンドは Et/g-n.sh

```
gfan <g-n.txt | gran_render >g-n.xfig
xfig g-n.xfig
```

例 5.4

$$I = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + 2x_3)$$

の Gröbner fan を計算せよ. 結果を図示せよ.

gfan

入力ファイル Et/g-l2.txt

```
{a+b+c, b+2*c}
```

最大次元の cone は 3 つある.

図の生成コマンド (g-l2.sh はなにも描かない. 何故か?) Et/g-l2.sh

```
gfan <g-l2.txt | gfan_render >g-l2.xfig
gfan <g-l2.txt | gfan_renderstaircase -m >g-l2-s.xfig
```

xfig で図を見るには, xfig コマンドを用いる.

少々美しい図を生成する例を紹介しておこう. (A.Jensen 自身による紹介プログラム) Et/sym.txt

```
{aab-c, bbc-a, cca-b}
{(1,2,0)}
```

Et/g-sym.sh

```
gfan <sym.txt | gfan_render >sym.xfig
gfan <sym.txt | gfan_renderstaircase -m >sym-s.xfig
```

kan/sm1

Kan/sm1 は asir と同様国産のシステムである (実は筆者が著者). Kan/sm1 では
`/usr/local/OpenXM/lib/sm1/gfan.sm1` にある入力例を参考に入力を用意し, 実行する.

sm1 をスタートしたあと,

```
(gfan.sm1) run ;
cone.sample ;
```

(なお sm1 では 空白は token の分離に用いるので ; の前に空白の入力が必要) と入力すると,
 1-simplex $\times$ 2-simplex に付随した affine toric variety

$$I = (x_{1i}x_{2j} - x_{1j}x_{2i} \mid 1 \leq i < j \leq 3)$$

の Gröbner fan を計算するデモを実行する.

専門家向け: `gfan.sm1` に付属の `cone.sample2` の方は y と $y - (x - 1)^2$ に付随する Bernstein-Sato 多項式を Rouchdi Bahloul のアルゴリズムで計算するため, 微分作用素環のイデアルの local Gröbner fan の制限を計算する例である.

gfan と同様な次の問題をやってみよう.

例 5.5

$$I = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + 2x_3)$$

の Gröbner fan を計算せよ.

Et/s-12.sm1

```

[(parse) (gfan.sm1) pushfile] extension
/mytry {
  %決まり文句
  cone.load.cohom
  /cone.ckmFlip 1 def

  % 変数のリスト (形式 1)
  % List of variables
  /cone.vlist [(a) (b) (c)
              (Da) (Db) (Dc) (h)] def

  % 変数のリスト (形式 2)
  /cone.vv (a,b,c) def

  % 3 変数なので 3 3 と書く.
  /cone.parametrizeWeightSpace {
    3 3 parametrizeSmallFan
  } def

  % 以下は同次多項式の場合はきまり文句として書いておく.
  /cone.type 2 def
  /cone.local 0 def
  /cone.w_start
    null
  def
  /cone.h0 1 def

  % 入力はこちらへ書く.
  /cone.input
    [
      (a + b + c)
      (b + 2 c)
    ]
  def

  % 以下は同次多項式の場合はきまり文句として書いておく.
  /cone.DhH 0 def
  /cone.gb {
    cone.gb_Dh
  } def

  cone.input message
  %%%% Step 1. Enumerating the Grobner Cones in a global ring.
  %%%% The result is stored in cone.fan
  getGrobnerFan

  %%%% If you want to print the output, then uncomment.
  printGrobnerFan

} def

```

このファイル名を `s-12.sm1` とするとき, `sm1` をスタートしたあと,

```
(s-12.sm1) run ;
```

```
mytry ;
```

で計算を遂行する.

D -加群についてのグレブナ `fan` を調べようとおもったら現在のところ `kan/sm1` しか実装がない.

Todo: D -module の節で `x2y2.sm1` を説明.

5.4 tropical geometry

gfan では initial term を weight と exponent の内積との最大値で定義している. われわれのノートとは反対になっているので注意しよう.

例 5.6

$$I = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_2 + 2x_3 + 3x_4)$$

の tropical zero set.

gfan への入力例を紹介しよう. たとえば次の入力プログラム (t42.txt) Et/t42.txt

```
{a+b+c+d,b+2*c+3*d}
```

で生成されるイデアルの tropical zero set を計算してみよう.

gfan への入力. Et/t42.sh

```
gfan_tropicalstartingcone <t42.txt | gfan_tropicaltraverse >t42-out.txt
```

出力 Et/t42-out.txt

```
Ambient dimension: 4
Dimension of homogeneity space: 1
Dimension of tropical variety: 2
Is simplicial: true
Order of input symmetry group: 1
Number of maximal cones: 4
Modulo the homogeneity space:
{
(1,1,1,1)}
Rays:
{
0: (-1,0,0,0),
1: (0,-1,0,0),
2: (1,1,1,0),
3: (0,0,-1,0)}
Printing index list for dimension 1 cones:
{
{0},

{1},

{2},

{3}}
Number of dimension 1 cones incident to each ray:
(1,1,1,1)
F-vector:
(4)
```

Homogeneity space が $(1, 1, 1, 1)$ なので, $(1, 1, 1, 1)$ のスカラー倍を足したものは同値な weight となる. $q \geq 0, p \in \mathbf{R}$ として

$$q((-1, 0, 0, 0) + p * (1, 1, 1, 1))$$

$$q((0, -1, 0, 0) + p * (1, 1, 1, 1))$$

$$q((1, 1, 1, 0) + p * (1, 1, 1, 1))$$

$$q((0, 0, -1, 0) + p * (1, 1, 1, 1))$$

の4つが tropical variety の最大次元の cone である.

たとえば $w = (1, 1, 1, 0)$ と時,

$$I = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_2 + 2x_3 + 3x_4)$$

の reduced Gröbner basis を $\succ_w$ で計算すると

$$G = [x_1 - x_3 - 2x_4, x_2 + 2x_3 + 3x_4]$$

となる.

$$\text{in}_w(I) = (x_1 - x_3, x_2 + 2x_3)$$

はたしかにモノミアルを含んでいない.

なお現在の gfan では, tropical zero set の次元が 1 となる場合は abort と表示されて停止してしまう.

例 5.7 gfan のソースの doc/example にある grassmann2_5 をためしてみよう.

Et/grassmann2x5.txt

```
{
bf-ah-ce,
bg-ai-de,
cg-aj-df,
ci-bj-dh,
fi-ej-gh
}
{
(3,6,8,9,0,1,2,4,5,7),
(0,6,5,4,3,2,1,9,8,7)
}
```

$(m+1) \times n$ 行列を考える. $i_1, \dots, i_m, j_k$ 列をならべてつくった正方行列式を $p_{i_1 \dots i_m j_k}$ と書くとき, Plücker の関係式は

$$\sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k p_{i_1 \dots i_m j_k} p_{j_0 \dots \hat{j}_k \dots j_{m+1}} = 0$$

と書ける.

いまの場合 $m = 1, n = 5$ である. ちなみに asir でこのような関係式の具体形を出力したい場合は, Et/asir-plucker.txt

```
plucker_relation([1],[2,3,4]);
plucker_relation([1],[2,3,5]);
plucker_relation([2],[3,4,5]);
```

などと入力する.

gfan への入力には Plücker 多項式である. $\binom{5}{2} = 10$ なので 10 変数ある. $10 - 3$ の 7 次元の variety である.

出力をみればわかるように, 同次な部分が 5 次元分あり, tropical zero set の実質的な部分は 2 次元である.

Grassmannian の tropical 幾何の理論的考察については, David Speyer, Bernd Sturmfels, The Tropical Grassmannian, <http://arxiv.org/abs/math/0304218> (arXiv:math/0304218v3) [5] を参照. とくに $G_{2,n}$ の tropical zero set の simplicial complex としての構造は phylogenetic tree という graph に等しいということが証明してある.

問題: 筆者は証明を読んでいないので解説してレポートされたい. あわせて `gfan` で $G_{2,6}$ の場合のグラフを作成されよ.

超幾何関数へのノート: $(2, 5)$ Grassmann は Appell の 2 変数超幾何関数 F_1 に関係深い.

5.5 Toric variety

この節では toric variety のグレブナ基底とそれに付随する多面体の組み合わせ論を Macaulay や 4ti2 などを利用してしらべていくことにしよう.

Macaulay2 は可換環論や D-加群の計算を行う以外に非常に美しいユーザ言語も付属しているシステムである.

5.5.1 Macaulay2 の基本

まず Macaulay2 を対話型電卓として利用する方法を説明する.

Macaulay は数の処理のみならず, 多項式の計算や環論の不変量の計算もできる. 電卓的に使うための要点を説明し例をあげよう.

例 5.8 $+$, $-$, $*$, $/$, $^$ はそれぞれ足し算, 引き算, かけ算, 割算, 冪乗. たとえば,

$$2*(3+5^4)$$

と入力すると $2(3+5^4)$ の値を計算して戻す.

例 5.9 多項式の計算をするにはまず環の定義をする. それから計算する.

```
i3 : R = QQ[t,x,y,z]

o3 = R

o3 : PolynomialRing
```

ここで `R : PolynomialRing` は `R` が `PolynomialRing` オブジェクトであることを示している. `R` と入力すると `R` と `PolynomialRing` と戻るのみである. このように Macaulay 2 では 変数名 と入力しても値が戻るとは限らないことに注意. `R` の中身を詳しく見るには, `describe(R)` または `describe R` コマンドを用いる.

一般に Macaulay 2 では, 変数 とすると, 値 : オブジェクトの名前 を表示するが, 値が複雑な場合は適宜簡潔な表現方法が選択される.

```

i6 : f=x-t^2

      2
o6 = - t  + x
o6 : R

i7 : g=y-t^3

      3
o7 = - t  + y
o7 : R

i8 : h=z-t^4

      4
o8 = - t  + z
o8 : R

i9 : f+g

      3      2
o9 = - t  - t  + x + y
o9 : R

```

この例では ...

例 5.10 さて前の例で定義した多項式 f, g, h から t を消去してみよう. 消去は t 変数の重みを 1 に, 他の変数の重みを 0 としてグレブナ基底を計算することにより実行できる.

```

i12 : R = QQ[t,x,y,z, Weights => {{1,0,0,0}}]

o12 = R

o12 : PolynomialRing

i13 : f=x-t^2; g=y-t^3; h=z-t^4;

i16 : curve=ideal(f,g,h)

          2      3      4
o16 = ideal (- t  + x, - t  + y, - t  + z)

o16 : Ideal of R

i17 : gb(curve)

o17 = | y2-xz x2-z tz-xy ty-x2 tx-y t2-x |

o17 : GroebnerBasis

```

この結果をみればわかるように

$$y^2 - xz, x^2 - z$$

が t を消去して得られる多項式であり, その幾何的意味は ... **まだ書いてない**

さて Macaulay2 ではさまざまな環論の不変量を計算するための関数があらかじめ組み込まれている.

例 5.11 上の curve の (Krull) 次元を計算せよ.

```

i18 : dim curve
o18 = 1

i19 : degree curve
o19 = 4

```

なお 上の dim curve は dim(curve) と書いてもよい. また 上の degree curve は degree(curve) と書いてもよい.

例 5.12 モノミアルで生成されるイデアルの極小自由分解の計算をしてみよう. この機能により組み合わせ論と可換環論の交錯する魅力的な分野での数学実験が可能となる.

```

i20 : S=QQ[a,b,c,d];

i21 : I=monomialIdeal(a^2,a*b,b^3,a*c);

o21 : MonomialIdeal of S

i22 : res I

      1      4      4      1
o22 = S  <-- S  <-- S  <-- S  <-- 0
      0      1      2      3      4

o22 : ChainComplex

```

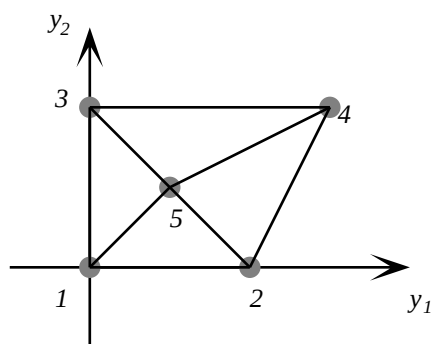
上の 1, 4, 4, 1 を betti 数とよぶ. betti 数に関する数学の定理... まだ書いてない

5.5.2 Macaulay2 を用いて多面体を三角形に分割する

Todo: 正則三角形分割と toric ideal の initial については黒板で説明.

課題: 論文 2007/knx/st.pdf [12] を読み証明を理解する.

ここでは図 5.5.2 に表示された 5 点を考える. この 5 点の凸包は四角形 1,2,3,4 であるが, この 5 点とその重み $(1, 1, 1, 1, 0)$ を用いた正則三角形分割を計算してみよう.



```

i1 : load "LLL.m2";
i2 : load "triangulate.m2";
--loaded triangulate.m2

i3 : A={{1,1,1,1,1},{0,2,0,3,1},{0,0,2,2,1}}

o3 = {{1, 1, 1, 1, 1}, {0, 2, 0, 3, 1}, {0, 0, 2, 2, 1}}

o3 : List

i4 : I = toricIdeal A

          2   3 2       4
o4 = ideal (b*c - e , a d - b*e )

o4 : Ideal of R

```

変数 a, b, c, d, e がそれぞれ点 $1, 2, 3, 4, 5$ に対応している. 環 R は関数 `toricIdeal` の中で自動的に定義される.

次のコード `triangulate.m2`¹ は M.Stillman, B.Sturmfels, R.Thomas ?? による点集合で定義される affine toric 多様体を計算するプログラムである. `Et/m2-toric.txt`

```

-- M2 book page 181.
toBinomial = (b,R) -> (
  top := 1_R; bottom := 1_R;
  scan(#b, i -> if b_i > 0 then top = top * R_i^(b_i)
              else if b_i < 0 then bottom = bottom * R_i^(-b_i));
  top - bottom);

toricIdeal = (A) -> (
  n := #(A_0);
  R = QQ[vars(0..n-1), Degrees=>transpose A, MonomialSize=>16];
  B := transpose LLL syz matrix A;
  J := ideal apply(entries B, b-> toBinomial(b,R));
  scan(gens ring J, f -> J = saturate(J,f));
  J );

```

このコードの解説はまだ書いてない.

1. R_i は ring R の i 番目の変数.
2. b_i は ベクトル b の i 番目成分.

¹なお Macaulay 0.9.95 とそれ以前はパッケージの構成方法が大きく変わっている. 0.9.95 以降では上の入力で `load("LLL.m2")`; は必要ない. ちなみに LLL パッケージを利用場合は `loadPackage("LLLBases")`; コマンドで読み込む.

```

i6 : R2=QQ[a,b,c,d,e,Weights=>{{1,1,1,1,0}}]

o6 = R2
o6 : PolynomialRing

i10 : F=map(R2,R)

o10 = map(R2,R,{a, b, c, d, e})
o10 : RingMap R2 <--- R

i11 : I2 = F(I)                                -- I2は新しい順序の入った ring でのイデアル.

              2   3 2       4
o11 = ideal (b*c - e , a d - b*e )

o11 : Ideal of R2

i17 : M=monomialIdeal I2                       -- M に I2 の initial ideal を.

              3 2
o17 = monomialIdeal (b*c, a d )

o17 : MonomialIdeal of R2

i19 : MM=radical M                             -- MM は M の radical

o19 = monomialIdeal (b*c, a*d)

o19 : MonomialIdeal of R2

i20 : primaryDecomposition MM  --MM を準素イデアル分解して三角形分割を得る.

o20 = {monomialIdeal (a, b), monomialIdeal (a, c), monomialIdeal (b, d),
       monomialIdeal (c, d)}

o20 : List

```

さて, (a, b) の補集合は (c, d, e) , 頂点のインデックスでは $(3, 4, 5)$,
 さて, (a, c) の補集合は (b, d, e) , 頂点のインデックスでは $(2, 4, 5)$,
 さて, (b, d) の補集合は (a, c, e) , 頂点のインデックスでは $(1, 3, 5)$,
 さて, (c, d) の補集合は (a, b, e) , 頂点のインデックスでは $(1, 2, 5)$ である. 頂点のインデックスが図 5.5.2 の三角形の頂点と見事に対応していることが観察できるだろう.

問題 5.1 Voronoi 図は 各点 (x,y) の重みを $x^2 + y^2$ とした正則三角形分割の Dual である. Knoppix/math icms2006 DVD2 収録の DEpthLaunay による Voronoi 図を M2 による代数計算で構成してみよう.

数学関連事項はテキスト以外に板書でも説明. ビデオ: 2007-05-01 の学生向け解説.

5.5.3 グレブナ基底関連システムのコマンド対応表

Knoppix/Math にはグレブナ基底や可換環論のためのシステムが数通りはっている. これらの間のコマンドを比較してみよう.

5.5.4 環の定義

たとえば $\mathbb{Q}[x,y,z]$ を x の重みが 10, y の重みが 5, z の重みが 0 で順序づけたモノミアル順序の環.

Macaulay2 では

```
QQ[x,y,z,Weights==>{{10,5,0}}]
```

Singular では

Risa/Asir では

```
[1153] Opt=[["v",[x,y,z]], ["order",[x,10,y,5]]];
      [[v,[x,y,z]], [order,[x,10,y,5]]];
[1154] dp_gr_main([x^2+y^2+z^2-1,x*y*z-1,x*y+y*z+z*x-3] | option_list=Opt);
```

とグレブナ基底計算等をおこなうと自動的に現在の環が設定され, 分散表現多項式がこの環に属することとなる.

Kan/sml では

```
[(x,y,z) ring_of_polynomials [[(x) 10 (y) 5 (z) 0]] weight_vector 0]
define_ring
```

normal form の計算

Macaulay2 では `%`, Risa/Asir では `true_nf`, Kan/sml では `reduction`, Singular では ...
まだ詳しく書いてない

Toric 専用の Gröbner fan の計算システム

asir-contrib の tigers を見よ.

5.5.5 4ti2

4ti2 は toric ideal 専用のグレブナ基底計算プログラムである. (localization と saturation を上手に用いて高速化をはかっているようだ???)

例 5.13

入力プログラム Et/2x2.txt

```
3 4
1 1 0 0
1 0 1 0
0 1 0 1

row column 3 4
```

実行

groebner 2x2.txt

すると, 2x2.txt.gro というファイル が自動生成される. Et/2x2.txt.gro

```
1 4
-1 1 1 -1
```

この見方の説明.

$-1 \ 1 \ 1 \ -1$ は $x_1^1 x_4^1 - x_2^1 x_3^1$ に対応.

Todo: Et/4ti2 E(2,5) の例.

5.6 Feasible set の上の乱歩

5.6.1 Toric variety のグレブナ基底の応用

数学関連事項はテキスト以外に板書でも説明. ビデオ: 2007-5-1 にした random sampling の学生への説明

5.6.2 Codon の代数的統計学

Todo: この章は当分完成しないかも. 無視してね...

命題 5.1 $w(i \rightarrow k)$ を状態 i から状態 k への遷移確率とする. 次の条件

$$w(i \rightarrow k) \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right) = w(k \rightarrow i) \exp\left(-\frac{E_k}{k_B T}\right) \quad (5.2)$$

が成立していれば, この遷移確率で変化していく系は正準分布に近づいていく.

証明. このような系が多数あるとし, いま状態 i にある系が N_i 個であるとする. この多数の系が次の状態に同時に遷移する. この時 状態 i から k へ遷移するものの個数は $w(i \rightarrow k)N_i$ であり, 状態 k から i へ遷移するものの個数は $w(k \rightarrow i)N_k$ である. この和の差は

$$\begin{aligned} w(i \rightarrow k)N_i - w(k \rightarrow i)N_k &= N_i w(k \rightarrow i) \left(\frac{w(i \rightarrow k)}{w(k \rightarrow i)} - \frac{N_k}{N_i} \right) \\ &= N_i w(k \rightarrow i) \left(\frac{\exp\left(-\frac{E_k}{k_B T}\right)}{\exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right)} - \frac{N_k}{N_i} \right) \end{aligned}$$

となる. N_k/N_i の比が想定値より小さいなら上の式の右辺は正となる. このとき左辺をみれば i から k へ遷移するものの方が, k から i へ遷移するものより多い. よって N_k/N_i の比は増える. N_k/N_i の比が想定値より大きい場合も同様である.

右辺が 0 に収束していくことになるが, この時 N_k/N_i の比は正準分布の比に等しい.

条件 (5.2) により一意的に $w(i \rightarrow k)$ がきまるわけではない. この決め方には任意性がある. Metropolis 法では $E_k - E_i \leq 0$ の時 1, $E_k - E_i > 0$ の時

$$\exp\left(-\frac{E_k - E_i}{k_B T}\right)$$

と選ぶ. この条件は (5.2) を満たす.

この方法を応用して一次元の超幾何多項式の近似計算を試みよう. 我々が考える超幾何多項式は次の和である.

$$\Phi(x) = \sum_{A \mathbf{k} = \beta, k_i \geq 0} \frac{1}{\mathbf{k}!} x^{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{k}! = k_1! \cdots k_n! \quad (5.3)$$

ここで A は行列 $A = (1, 2)$, $n = 2$ である. たとえば $\beta = 6$ だと

$$\Phi = \frac{x^0 y^3}{0!3!} + \frac{x^2 y^2}{2!2!} + \frac{x^4 y^1}{4!1!} + \frac{x^6 y^0}{6!0!}$$

となる. β の値を大きくするとこれは巨大な多項式となっていく. ここで $\Phi(x)/\Phi(1)$ の値を $x = 1$ の近傍で近似計算する問題を考えよう. 考え方としては, $\Phi(x)$ に出現する各項を Metropolis 法で

超幾何分布に従い、生成する。すべての場合を生成するわけではない。したがって部分和にほかならない。生成された指数の集合を E と書こう。我々が計算するのは $\Phi_E(x)/\Phi_E(1)$ である。ここで

$$\Phi_E(x) = \sum_{k \in E, Ak=\beta, k_i \geq 0} \frac{x^k}{k!} \quad (5.4)$$

である。このような方法でどの程度の近似が計算できるのかは計算実験が必要である。 **まだやってない**

同様に重み付の和

$$\Phi(c_k; x) = \sum_{Ak=\beta, k_i \geq 0} \frac{c_k x^k}{k!} \quad (5.5)$$

を考えて、 $\Phi(c_k; x)/\Phi(x)$ の値を近似計算する問題も同様の手法で近似計算できると予想できる。分母が正確に計算できて、大きい数だとすると、 $\Phi_E(c_k; x)/\Phi(x)$ の近似度はかなりよいはず。 **まだやってない**

プログラム 5.1 頻度をグラフ表示する関数. `metro1.rr:histgram`. `metro1.rr:test_hist`

プログラム 5.2 逆関数法で正規分布を生成する関数. `metro1.rr:g1` `metro1.rr:test_g1`

何故中心部の分布が少ないのか?

プログラム 5.3 metropolis 法で正規分布を生成する関数. `metro1.rr:g2t` `metro1.rr:test_g2t`

とりあえず正規分布みたいな形を得た。やはり真ん中が引っ込んでるが。

Metropolis 法で正規分布を作ろう。このとき $\frac{-2 \text{ 以下のものの個数}}{\text{生成した乱数の個数}}$ は $\int_{-\infty}^{-2} e^{-x^2} dx / \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ に近づくと予想できる。 **まだためしていない**

注意: `mpi()`; をみればわかるように、積分値の計算に Metropolis 法は使えない。

ところで分母の積分値は $\sqrt{\pi}$ だが、この値を計算できるシステムはあるか?

```
Integrate[Exp[-x^2], {x, -Infty, Infty}]
```

Todo: to be continued.

関連図書

- [1] David Eisenbud, Daniel R.Grayson, Michael Stillman, Bernd Sturmfels 編, Computations in Algebraic Geometry with Macaulay 2, Springer, 2002.
- [2] Günter M.Ziegler, *Lectures on Polytopes* (Graduate Texts in Mathematics 152, Springer-Verlag New York 1995)
- [3] Komei Fukuda cdd Home Page (http://www.ifor.math.ethz.ch/~fukuda/cdd_home/cdd.html)
- [4] H.Edelsbrunner, *Algorithms in Combinatorial Geometry* (Springer-Verlag 1986)
- [5] David Speyer, Bernd Sturmfels, The Tropical Grassmannian, <http://arxiv.org/abs/math/0304218> (arXiv:math/0304218v3)
- [6] B.Sturmfels, *Gröbner basis and convex polytope*, 1995
- [7] K.Fukuda, A.Jensen, R.Thomas, Computing Gröbner fans, [math.AC/0509544](#)
- [8] T.Bogart, A.Jensen, D.Bayer, B.Sturmfels, R.Thomas, Computing tropical varieties, [math.AC/0507563](#)
このふたつの論文は tropical の計算方法を知るには大事.
- [9] J.Richter-Gebert, B.Sturmfels, T.Theobald, First steps in tropical geometry, [math.AG/0306366](#)
これは最初に読むおすすめの tropical 幾何入門.
- [10] Grigory Mikhalkin, Tropical geometry and its applications, [math.AG/0601041](#)
筆者があまり知らない Amoeba よりの解説.
- [11] Walker, *Algebraic curves*, 1950.
代数方程式をべき級数で解く方法の解説がある. Tropical 幾何の基本定理の証明に必要.
- [12] B.Sturmfels, Gröbner bases of toric varieties, Tohoku Mathematical Journal, **43**, (1991), 249–261.
Affine toric ideal の Gröbner basis と 三角形分割, Gröbner fan の関連を論じた論文. 2007/knx/st.pdf (パスワード保護) にあり. 同じ著者の本 Gröbner basis and convex polytope の最初の方も (ideal は homogeneous と仮定して読んでおくと), tropical 幾何と Gröbner fan の関連論文を読むには必読.
- [13] Rouchdi Bahloul and Nobuki Takayama, Local Grobner fan: polyhedral and computational approach, 2005, [math.AC/0412044](#)
D-modules, local Gröbner fans, ...