第2章と第5章

新井 敏康

数学で使う用語「関係」「性質」「条件」「述語」はそれぞれニュアンスが異なるが、集合の言葉で書けば、ある集合の部分集合のことである。これらを総称して関係と呼ぶことにする。集合 X 上の n-項関係 R は $R \subseteq X^n$ のことで、$R(x_1, \ldots, x_n)$ が成立することと、$(x_1, \ldots, x_n) \in R$ を同一視している。

定義 0.1 順序集合 $(X, <)$ で、その任意の鎖 *(chain)* $C \subseteq X$（とは $<$ が C 上では全順序になっていること）が上限 $\sup C$ を有するとき、帰納的 *(inductive)* と呼ばれる。

ツォルン *(Zorn)* の補題 は、任意の空でない帰納的順序集合が極大元を有することを主張する。

集合 X についてその濃度を $|X|$ で表す。

$$|X| + \aleph_0 = \begin{cases} |X| & X \text{ が無限集合} \\ \aleph_0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

であることに注意。$\aleph_0$ は最小の無限濃度つまり可算無限集合の濃度を表す。

補題 0.2 (Cantor-Berstein) $|X| \leq |Y| \,\&\, |Y| \leq |X| \Rightarrow |X| = |Y|$.

補題 0.3 (Comparability, Cantor's trichotomy) 集合 X, Y について

$$|X| \leq |Y| \vee |Y| \leq |X|.$$

補題 0.4 無限集合 X について

$$|X \times X| = |X|$$

なので $|X^n| = |X| \, (n = 1, 2, \ldots)$ となり、$X^{<\omega} = \bigcup_{n<\omega} X^n$（$X$ の元の有限列全体の集合）について

$$|X^{<\omega}| = |X| \tag{1}$$

証明. 無限集合 X について $X \times X$ から X への単射 (injection) の存在だけ示せばよい。

X の無限部分集合 Y と直和 $Y + Y$ と Y との単射 f_Y と直積 $Y \times Y$ と Y との単射 g_Y の組 (Y, f_Y, g_Y) をすべて考え、これらを順序

$$(Y, f_Y, g_Y) < (Z, f_Z, g_Z) :\Leftrightarrow Y \subseteq Z \,\&\, f_Y \subseteq f_Z \,\&\, g_Y \subseteq g_Z$$

で順序付けると帰納的順序集合 $\mathcal{F}$ になる。

いま

無限集合は可算無限部分集合を含む

を認めると、$\mathcal{F}$ は空でない。なぜなら可算無限集合 $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ について、$g_N : N \times N \to N$ を、$g_N(n, m) = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n$ とすればよいから。

そこで ツォルンの補題により、この帰納的順序集合 $\mathcal{F}$ の極大元 Y を取り、Z をその補集合 $X \setminus Y$ とおく。

初めに $|Y| \leq |Z|$ なら Y のコピー $Y' \subseteq Z$ を取って、$Y_2 = Y + Y'$ を考えると、$f_Y : Y + Y \to Y$ を使って、f_Y の拡張 $f : Y_2 + Y_2 \leftrightarrow Y_2$ がつくれ、また $g_Y : Y \times Y \to Y$ と f_Y を使って、g_Y の拡張 $g : Y_2 \times Y_2 \to Y_2$ $(Y_2 \times Y_2 \leftrightarrow (Y \times Y) + (Y \times Y') + (Y' \times Y) + (Y' \times Y'))$ がつくれることになり、Y が極大元であったことに反す。

よって $|Y| > |Z|$ でなければならない。このとき $X = Y + Z$ について $Y_2 \times Y_2 \leftrightarrow Y_2$ と同様にして単射 $g : X \times X \to X$ がつくれることが分かる。

□

1　1階論理で書き表す練習

ここではいくつかの例を通して、1階論理で命題や関係を書き表す練習から始めよう。論理記号または論理結合子 (logical connective) の読み方は、$\vee$(or または), $\wedge$(and かつ), $\neg$ (not でない), $\to$(implies ならば), 等号 $=$, 量化記号 (quantifier) $\exists$(there exists 存在), $\forall$(for all 任意) である。

<u>群論からの例</u>

次の概念を考えよう：

(a) 群

(b) アーベル群

(c) 非自明アーベル群 (non-trivial Abelian group)

(d) ねじれのない (torsion-free) 群　例：Z

(e) ねじれのない可除アーベル群 (torsion-free divisible Abelian group) 例: Q

この内、どれが記号 $+, -$ と 0 のみを用いて1階論理で書き表せるか見てみよう。

群とは構造 $G = \langle G; +, -, 0 \rangle$ (G は空でない集合、$0 \in G$ で $+$ と $-$ はそれぞれ G 上の二項演算と一項演算) で次の1階論理で書き表わされた公理

(閉論理式 (closed formula, sentence) とも呼ばれる）を満たすものである：

$$\forall x \forall y \forall z [x + (y + z) = (x + y) + z]^1 \tag{2}$$

$$\forall x [x + 0 = x] \tag{3}$$

$$\forall x [x - x = -x + x = 0] \tag{4}$$

これはもちろん

$$\forall x [x + (-x) = 0 \wedge (-x) + x = 0]$$

の略記である。

ここで G が上の論理式を満たす、というときには、各変数 $x, y, \ldots$ は、構造の対象領域（対象としているモノの集まり）G の元を走っていると解釈する。

G が (2), (3), (4) を満たすと言う代わりに、論理学者の言い方では、G は (2), (3), (4) の モデル (model) であると言い、$G \models (2) \wedge (3) \wedge (4)$ と書く。

アーベル群は、群 G で次の公理を満たすもの：

$$\forall x \forall y [x + y = y + x] \tag{5}$$

アーベル群 G が非自明とは、$G \neq \{0\}$ ということなので

$$\exists x [x \neq 0] \tag{6}$$

を満たすといえばよい。

以下で導入される概念のため省略記法を準備する。$(x + x)$ を $2x$ で、$((x + x) + x)$ を $3x$ で、以下、帰納的に $(nx + x)$ を $(n + 1)x$ で略記する。

このとき、アーベル群 G が ねじれがない (torsion-free) とは

$$\forall n \geq 1 \forall x [x \neq 0 \rightarrow nx \neq 0] \tag{7}$$

となっているとき。

(7) は記号 $+, -$ と 0 のみを用いた 1 階論理の閉論理式ではない：なぜなら初めの量化記号 $\forall n \geq 1$ における変数 n が正整数を走っており、議論の対象である集合 G を走っていないからだ。しかしながら (7) は以下の無限個の公理の列で置き換え得る：

$$\forall x [x \neq 0 \rightarrow nx \neq 0] \, (n = 2, 3, \ldots) \tag{8}$$

ねじれがないという概念を書き表わすのに、無限個の公理を要するということが必然であることを証明しておくことは無価値ではあるまい。この節で述べられた命題の証明は 4 節で与えられる。

[1] 数学ではこれを $x + (y + z) = (x + y) + z$ と書く、つまり、量化記号 $\forall$ を通常省略する。論理学ではこれを略さない。

命題 1.1 有限個の閉論理式がすべてのねじれがないアーベル群で正しければ、それらの閉論理式は、あるねじれがあるアーベル群でも正しい。

この結果は、ねじれがないアーベル群は（1 階論理で）公理化可能だが、有限公理化可能(finitely axiomatizable) でない、と言い表わす。つまり（1 階論理の）公理の集合でその構造を特徴付けられるが、そのような集合で有限なものは存在しないということである。

アーベル群 G が 可除 (divisible) であるとは

$$\forall x \exists y [ny = x] \, (n = 2, 3, \ldots) \tag{9}$$

となることであるから、ねじれがないアーベル群のときと同様にして、可除アーベル群は群の言語 $+, -, 0$ で公理化可能だが、有限公理化可能ではない。つまり、群の言語のどんな閉論理式の有限集合をとっても、それが任意の可除アーベル群で正しければ、可除でないアーベル群でも正しくなってしまう。

環と体

環や体を考えるために記号 $+, -, \cdot, 0, 1$ を用意する。(単位元を持った可換) 環の公理はアーベル群のそれ (2)-(5) と次の 1 階の論理式：

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y [x \cdot y = y \cdot x], \\
&\forall x \forall y \forall z [(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)], \\
&\forall x \forall y \forall z [x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)], \\
&\forall x [x \cdot 1 = x], \\
&0 \neq 1.
\end{aligned} \tag{10}$$

さらに環が 整域 (integral domain) であるのは、零因子がないということだから

$$\forall x \forall y [xy = 0 \to x = 0 \vee y = 0]$$

と書けばよい。

環 $\mathcal{R} = \langle R; +, \cdot, 0, 1 \rangle$ における イデアル (proper ideal) とは、空でない真部分集合 $I \subseteq R$ で、加法 $+$ に関して $\mathcal{R}$ の部分群を成し、任意の $x \in R$ と任意の $y \in I$ について $x \cdot y \in I$ となるものであった。これを 1 階論理で書き表すために I の名前（1 変数関係記号）を記号に加えて、構造 $(\mathcal{R}, I) := \langle R; +, -, \cdot, 0, 1, I \rangle$ を考える。すると I が $\mathcal{R}$ のイデアルであるのは、$(\mathcal{R}, I)$ が次のモデルであると言い表せる：

$$\begin{aligned}
&I(0) \wedge \neg I(1), \\
&\forall x \forall y [I(x) \wedge I(y) \to I(x + y)], \\
&\forall x [I(x) \to I(-x)], \\
&\forall x \forall y [I(y) \to I(x \cdot y)].
\end{aligned}$$

ここまで出てきた諸概念はすべて自然に1階論理式で書けたか、そうでないことが簡単に分かるものばかりであった。いつもこうとは限らない。一見、1階論理式で表現できそうにない概念と同値な1階論理式を見いだすことは応用上重要なことがある。

イデアルが極大イデアル (maximal ideal) であるとは、それを真に含むイデアルが存在しないこと、つまり $(\mathcal{R}, I)$ が次のモデルであること：

$$\forall J[I \subseteq J \wedge J \text{ an ideal } \rightarrow J = I \vee J = R]. \tag{11}$$

これは対象領域 R の部分集合を走る変数 J を用いているから1階の論理式でなく、2階の論理式と呼ばれるものである。これを1階論理式で表すために次の事実を思い出そう：イデアル I が $\mathcal{R}$ において極大なのは、商 $\mathcal{R}/I$ が体であること。これを言い換えると、どんな x についても 剰余類について $x+I \neq 0+I$ なら $(x+I)(y+I) = 1+I$ となる y が存在すること、となる。$x+I \neq 0+I \leftrightarrow \neg I(x)$ と $(x+I)(y+I) = (x \cdot y)+I$ に注意して (11) は

$$\forall x[\neg I(x) \rightarrow \exists y((x \cdot y)+I = 1+I)]$$

よって次と同値：

$$\forall x[\neg I(x) \rightarrow \exists y \exists z(I(z) \wedge xy + z = 1)] \tag{12}$$

次に体を考えてみる。(可換) 環 $\boldsymbol{F}$ が (可換) 体 (field) であるのは、$\boldsymbol{F}$ が次のモデルである時：

$$\forall x \exists y[x \neq 0 \rightarrow x \cdot y = 1] \tag{13}$$

体 $\boldsymbol{F}$ の 標数 (characteristic) が素数 p であるのは、$\boldsymbol{F}$ が

$$p1 = 0 \tag{14}$$

のモデルであること。

$\boldsymbol{F}$ の標数が 0 であるのは

$$\forall p[p \text{ prime } \rightarrow p1 \neq 0] \tag{15}$$

これは (7) と同様、1階論理式ではない、がその時のように論理式の無限列

$$\{p1 \neq 0 : p \text{ prime}\} \tag{16}$$

で置き換えればよい。

命題 1.1 と同様の結果が成り立つが、これはより興味深いものである。

命題 1.2 *1階の閉論理式がすべての標数 0 の体で成り立てば、それは十分大きい素数 p についてすべての標数 p の体でも成立。*

代数的閉体

一つ省略記法。x^2 は $(x \cdot x)$ のことで、以下、帰納的に x^{n+1} は $(x^n \cdot x)$ のこととする。この時、体 $\boldsymbol{F}$ が代数的閉体 (algebraically closed) であるのは、n 次の代数方程式が解を持つことだから、次の形の公理の無限列のモデルであること：

$$\forall x_{n-1} \cdots \forall x_1 \forall x_0 \exists y [y^n + x_{n-1} y^{n-1} + \cdots + x_1 y + x_0 = 0] \, (n = 2, 3, \ldots) \quad (17)$$

実数

ここまでの例はすべて構造のあるクラス全体に関わるものであった。ここでは特定の構造、すなわち実数の順序体 $\boldsymbol{R} = \langle \boldsymbol{R}; +, -, \cdot, <, 0, 1 \rangle$ を考えよう。

一般に順序体とは構造 $\langle \boldsymbol{F}; +, -, \cdot, <, 0, 1 \rangle$ であって、$\langle \boldsymbol{F}; +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ が（可換）体で、$<$ は M 上の全順序（線形順序）

$$\forall x \neg (x < x) \quad (18)$$

$$\forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z) \quad (19)$$

$$\forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x) \quad (20)$$

で、しかも次の意味で算法を保存するもの

$$\forall x \forall y \forall z (x < y \rightarrow x + z < y + z) \quad (21)$$

$$\forall x \forall y (0 < x \wedge 0 < y \rightarrow 0 < x \cdot y)$$

実数体 $\boldsymbol{R}$ の構成及び同型を除いて順序体 $\boldsymbol{R}$ が一意に定まることの証明では、多くの学生が頭を悩ませたことだろう。事実、

命題 1.3 順序体 $\boldsymbol{R}$ を、同型を除いて一意に定めるような *1* 階の論理式の集合は存在しない。

つまり、順序体 $\boldsymbol{R}$ を、同型を除いて一意に定めるにはその完備性：

空でない上に有界な $\boldsymbol{R}$ の部分集合は上限を有する。

が必要であり、これは (11) 同様、2 階の論理式である。

命題 1.3 は次の命題 1.4 から従う。

一般に順序体がアルキメデス的 (Archimedean) であるとは

$$\forall x \exists n \in \boldsymbol{N} [x \leq n1] \quad (22)$$

を満たすこと。

命題 1.4 $\boldsymbol{R} = \langle \boldsymbol{R}; +, \cdot, <, r \rangle_{r \in \boldsymbol{R}}$ の拡大体 $^*\boldsymbol{R}$ で、アルキメデス的でなく、しかも $\boldsymbol{R}$ と同じ *1* 階論理の閉論理式（どんな実数を表す定数が現れても可）を満たすものが存在する。

微分積分学での多くの定理が 1 階論理で書けるため、それらは $^*\boldsymbol{R}$ でも成立してしまう。$^*\boldsymbol{R}$ はアルキメデス的でないため無限大 $c > n\,(n = 0, 1, 2, \ldots)$ が存在する。c^{-1} は正の無限小を表していることに注意すれば、この結果は、無限小解析または A. Robinson による超準解析 (nonstandard analysis) の出発点になっている。こうして、Leibniz の万能記号計算の夢が、彼の無限小解析の正当化を導き出したと言ってもよい訳である。

<u>実閉体</u>

Artin-Schreier の実閉体の理論をすこし復習しよう。

体 $\boldsymbol{F} = \langle \boldsymbol{F}; +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ が <u>実体 (じつたい, real field)</u> であるのは、-1 が自乗和 (sum of squares) で書けないこと。

命題 1.5 体 $\boldsymbol{F}$ が実体である必要十分条件は、$\boldsymbol{F}$ が順序付けられること、すなわち全順序 $<$ が存在して $(\boldsymbol{F}, <)$ が順序体になることである。

順序体 $(\boldsymbol{F}, <)$ で <u>中間値の定理が成り立つ (intermediate value property)</u> とは、$\boldsymbol{F}$ 上の任意の多項式 $p(X) \in \boldsymbol{F}[X]$ について、もし $a < b$ かつ $p(a) < 0 < p(b)$ となっていたら、$p(X)$ の零点が a, b の間に取れる $(\exists c \in \boldsymbol{F}[a < c < b \wedge p(c) = 0])$ こと。

実体 $\boldsymbol{F}$ が <u>実閉体 (real closed field)</u> であるとは、$\boldsymbol{F}$ の代数的拡大で実体になるものは $\boldsymbol{F}$ 自身に限ること。

命題 1.6 体 $\boldsymbol{F} = \langle \boldsymbol{F}; +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ について、つぎの三条件は互いに同値：

1. $\boldsymbol{F}$ は実閉体。
2. どんな $x \in \boldsymbol{F}$ についても、平方根 $\sqrt{x}$ か $\sqrt{-x}$ が $\boldsymbol{F}$ で存在し、かつ任意の奇数次の方程式が $\boldsymbol{F}$ で解をもつ。
3. 順序 $\leq$ を
$$x \leq y :\Leftrightarrow \exists z \in \boldsymbol{F}[y - x = z^2]$$
で定めると、この順序で $(\boldsymbol{F}, <) = \langle \boldsymbol{F}; +, -, \cdot, <, 0, 1 \rangle$ は順序体となり、しかも順序体 $(\boldsymbol{F}, <)$ で中間値の定理が成り立つ。

これより実閉体が環の言語 $\{+, -, \cdot, 0, 1\}$ で公理化可能であることが分かる。

命題 1.7 順序体 $(\boldsymbol{F}, <)$ について順序を保つ代数拡大 $(\boldsymbol{G}, <)$ で実閉体（$\boldsymbol{F}$ の実閉包）となるものが存在し、しかもそのような $(\boldsymbol{G}, <), (\boldsymbol{G}_1, <_1)$ は順序体として同型である。さらに $\boldsymbol{F}$ を動かさない同型写像はひとつしかない。

さて例はこれくらいにして一般論に入る。

2　1階論理の形式化

関数記号 (function symbol)、関係記号 (relation symbol) の集まり L を言語 (language) という。L は空であってもどんなに大きい集合であっても構わない。各関数記号 $f \in \mathrm{L}$ は何変数であるか決まっているとする。f が n-変数であるとき、n-変数関数記号と呼ぶ。0-変数関数記号は特定のモノを表し、定数記号 (constant symbol, individual constant) と呼ばれる。同様に、各関係記号 $R \in \mathrm{L}$ も何変数であるか決まっており、R の変数の数が $n \geq 0$ であるとき、n-変数関係記号と呼ぶ。

この記号の集合 L は、考察の対象毎にその都度変わる。例えば、アーベル群について考えている時には、L には加法を表す関数記号 $+$ とその逆 $-$ と単位元のための定数記号 0 がある。また、順序について考えたいのなら、L には関係記号 $<$ がないといけない。

言語 L について L-構造 (structure for L) は、変数の変域を定め、また L の各記号を解釈するものである。構造から見たら、その言語は構造の型に当たる。またここで「記号」という言葉で言い表そうとしているのは、それが何であるか考えない、それらは互いに区別されているだけといことだ。つまり「記号」はそれ自身でなんらかの構造や関係にある数学的対象であろう。例えば集合かもしれないし自然数かもしれない。しかしそれが何であれその内実を考えない立場に立つとき、それを「記号」と呼ぶ。

定義 2.1 L-構造 とは対 $\mathcal{M} = \langle M; F \rangle$ であって、ここに M は空でない集合、F は L の各記号 α に次のように $\alpha^{\mathcal{M}} = F(\alpha)$ を対応させる写像である：

1. n-変数関係記号 $R \in \mathrm{L}$ に対し $R^{\mathcal{M}}$ は M 上の n-項関係、すなわち $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$.

2. n-変数関数記号 $f \in \mathrm{L}$ に対し $f^{\mathcal{M}}$ は M 上の n-項関数、すなわち $f^{\mathcal{M}} : M^n \to M$.

3. とくに 定数 $c \in \mathrm{L}$ に対し $c^{\mathcal{M}}$ は M の元 $c^{\mathcal{M}} \in M$.

$\mathcal{M}$ は通常 $\langle M; R^{\mathcal{M}}, \ldots, f^{\mathcal{M}}, \ldots, c^{\mathcal{M}}, \ldots \rangle$ と書き表わし、$|\mathcal{M}| := M$ を構造 $\mathcal{M}$ の 対象領域(universe) という。

例

アーベル群の言語 $\mathrm{L} = \{+, -, 0\}$ について L-構造は組 $\mathcal{M} = \langle M; +^{\mathcal{M}}, -^{\mathcal{M}}, 0^{\mathcal{M}} \rangle$ で、空でない集合 M と M 上の 2 項演算 $+^{\mathcal{M}}$, 1 項演算 $-^{\mathcal{M}}$ と $0^{\mathcal{M}} \in M$ から成る。数学の習慣に従って、$\mathcal{M}$ と M を同じ記号 G 等で表わす。

次に 1 階論理の構文論 (syntax)。言語 L を固定する。記号 $\mathrm{L} \cup \{\vee, \wedge, \neg, \to, =, \exists, \forall, x, y, z, \ldots\}$ の有限列を (L 上の) 記号列 (expression) と呼ぶ。記号列

に現れる記号の総数をその長さという。例：$(x+(x+y))$ の長さは（カッコと重複をこめて）9。変数 $x, y, z, \ldots$ は可算無限個あるとする。

初めにモノを表わす表現としての（言語 L の）式 (term)（多項式、有理式、...）を再帰的に定義する。

定義 2.2 *1.* 各変数と L の定数は式である。

2. n-変数関数記号 $f \in \mathrm{L}$ と式 $t_1, \ldots, t_n$ について $f(t_1, \ldots, t_n)$ も式である。

3. 以上によって式と分る記号列のみが式である。

変数を含まない式を閉式 *(closed term)* という。

この再帰的定義の最後の条項「以上によって式と分る記号列のみが式である」は再帰的に定義されているものが、上記によってのみ生成されていることを宣言している。これ無しでは、再帰的に定義されたものについてなにかを帰納的に証明することができない。例えば「n は自然数である」ということを $n \in X$ と書くことにしてこれを

$$n \in X \leftrightarrow n = 0 \vee \exists m \in X[n = m + 1]$$

とやったのでは、整数 $\boldsymbol{Z} = X$ もこれを満たしてしまう。

しかしこの最後の条項は再帰的定義であると断ったうえで以下省略する。

言語 L の式であることを強調したいときには L-式と呼ぶ。また、L-式全体の集合を Tm_L と書く。

次に、命題を表わす表現たる（言語 L の）論理式 (formula) を再帰的に定義する。

定義 2.3 原子論理式 (atomic formula) とは次のいずれかの形をした記号列のこと：

$$(t_1 = t_2),\ R(t_1, \ldots, t_n)$$

ここで $t_i \in Tm_L$ で、$R \in \mathrm{L}$ は n-変数関係記号。

定義 2.4 *1.* 原子論理式は論理式。

2. 論理式 φ, ψ について、$\neg\varphi, (\varphi \vee \psi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \to \psi)$ はいずれも論理式。

3. 論理式 φ と変数 x について、$(\exists x\varphi), (\forall x\varphi)$ はいずれも論理式。

原子論理式かその否定はリテラル (literal) と呼ばれる。

言語 L の論理式であることを強調したいときには L-論理式と呼ぶ。また、L-論理式全体の集合を Fml_L と書く。

論理式全体の濃度は、(1) より

$$|Fml_L| = |L| + \aleph_0 \tag{23}$$

論理式を作る際の最後につけられたカッコ、例えば $(\varphi \vee \psi)$ の一番外側のカッコは大概、省略する。また、同じ論理記号の繰り返しがあるときには、

$$\varphi \wedge \psi \wedge \theta :\equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \theta),\ \varphi \to \psi \to \theta :\equiv \varphi \to (\psi \to \theta)$$

のようにカッコをはずす。

次のいずれもアーベル群の言語での論理式である：

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ \exists y(x + y &= 0) \\ \forall x \exists y(x + y &= 0) \end{aligned}$$

この内、一つ目のでは変数 x, y がともに「遊んでいる」、つまりそれらに値を代入しない限り真とも偽とも言えない。二つ目では x は遊んでいるが y は「束縛されて」おり、三つ目では x, y 共に「束縛されている」ので記号を解釈する構造が与えられれば、真偽が決められる。

数学で $x + y = 0$ と書いたら、$\forall x \forall y(x + y = 0)$ を意図していることが多いが、集合 $\{(x, y) : x + y = 0\}$ であったり、あるいは y はパラメタで変数 x についての方程式を指しているかもしれない。ここではこのような曖昧さを避けるため、 $x + y = 0$ と $\forall x \forall y(x + y = 0)$ ははっきり区別して用いる。

論理式において、遊んでいる変数（パラメタ）をその論理式の <u>自由変数 (free variable)</u> と呼んだり、その変数は論理式に <u>自由に現れる (freely occur)</u> と言ったりする。また $\varphi[v_1, \ldots, v_n]$ と書いたら、論理式 φ に自由に現れる変数は高々 $v_1, \ldots, v_n$ であることを表わす。ここで、実際に $v_1, \ldots, v_n$ すべてが自由に現れていなくてよい。

定義 2.5 自由変数を持たない（言語 L の）論理式を L-閉論理式または単に <u>閉論理式 *(closed formula, sentence)*</u> という。

ここまでは言語 L の式、論理式は単なる記号の有限列に過ぎなかった。次に、我々が想定している意味を、論理記号に付与することにする。これは <u>充足関係 (satisfaction relation)</u> $\mathcal{M} \models \varphi$ を通じてなされる。ここで、$\mathcal{M}$ は構造で φ は閉論理式である。

$\mathcal{M} = \langle M; \ldots \rangle$ を L-構造とする。$\mathcal{M}$ に関する命題（論理式）が書け、それらの $\mathcal{M}$ での真偽を定義するために言語 L を拡張する：集合 M の各元 a ごとにその <u>名前 (name)</u> と呼ばれる定数 c_a を言語 L に付け加えて、新しい言語 $\mathrm{L}(\mathcal{M}) = \mathrm{L} \cup \{c_a : a \in M\}$ をつくる。この言語 $\mathrm{L}(\mathcal{M})$ の閉論理式 φ について関係 $\mathcal{M} \models \varphi$ を定義していくことになる。

L-構造 $\mathcal{M}$ は、新たに導入された定数 c_a の解釈を

$$(c_a^{\mathcal{M}}) := a$$

と定めることで、自然に L($\mathcal{M}$)-構造とみなされる。

初めに、L($\mathcal{M}$) での閉式 t の値 $t^{\mathcal{M}} \in M$ を定める。

定義 2.6 L を言語、$\mathcal{M} = \langle M; \ldots \rangle$ を L-構造、t を L($\mathcal{M}$)-閉式として $t^{\mathcal{M}} \in M$ を以下で再帰的に定義する：

1. t が定数ならば、$t^{\mathcal{M}} := c^{\mathcal{M}}$.
2. $t \equiv f(t_1, \ldots, t_n)\,(f \in \mathrm{L})$ ならば、$t^{\mathcal{M}} := f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}})$.

次に充足関係 $\mathcal{M} \models \varphi$ の定義をする。

$\varphi[v := t]$ で、論理式 φ におけるパラメタ v を（全部）式 t で置き換えた記号列を表す。明らかにこれはまた論理式になる。しかし t が閉式でない場合には少し注意を要する。例えば論理式 $\exists y(x + y = 0)$ でパラメタ x に $(y + y)$ をそのまま代入すると $\exists y((y + y) + y = 0)$ となってしまう。書きたいのは $\exists u((y + y) + u = 0)$ のはずである。このように式の代入によって、代入される式の変数が束縛されてしまう場合には、「新しい」つまり現在の文脈（論理式への代入でならその論理式）で用いられていない変数を任意にひとつ選んで束縛する変数のほうを新しい変数で置き換える。変数は可算無限個用意しておいたことを思い出そう。

これと似たことが例えば積分でも起こっている。例えば（連続）関数 $f(x, y)$ について定積分

$$F(y) = \int_0^1 f(x, y)\, dx$$

を考える。ここで x は束縛されているのに対し、y は遊んでいる。y には定数、例えば π を代入できるし、（連続）関数 $y = g(z)$ も代入できる：

$$G(z) = F(g(z)) = \int_0^1 f(x, g(z))\, dx.$$

ところでここで、y が x の関数 $y = h(x)$ だったら $H(x) = F(h(x))$ はどう定義されるだろう？もちろん

$$H(x) = F(h(x)) = \int_0^1 f(u, h(x))\, du \neq \int_0^1 f(x, h(x))\, dx$$

である。つまり数学では、代入することによって、遊んでいた変数が縛られてしまう時には、自動的に変数の名前を書き換えているのである。

しかしこの章では閉式の代入しか行わないので、この問題は発生しない。

定義 2.7 L を言語、$\mathcal{M} = \langle M; \ldots \rangle$ を L-構造、φ を L($\mathcal{M}$) での閉論理式として関係 $\mathcal{M} \models \varphi$ (: <u>$\mathcal{M}$ は φ を充たす</u>($\mathcal{M}$ *satisfies* φ), <u>φ は $\mathcal{M}$ で正しい</u>(φ is true in $\mathcal{M}$)) を以下で帰納的に定義する：

1. $\mathcal{M} \models t_1 = t_2 :\Leftrightarrow t_1^{\mathcal{M}} = t_2^{\mathcal{M}}$. ここで、左辺の等号 $=$ は形式的な言語の記号であり、右辺のそれは集合 M での相等関係を表すことに注意。

2. $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ ($R \in \mathrm{L}$ で等号以外) $:\Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}) \in R^{\mathcal{M}}$.

3. $\mathcal{M} \models \neg\varphi :\Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \varphi :\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi$ でない.

4. $\mathcal{M} \models \varphi \vee \psi :\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi$ または $\mathcal{M} \models \psi$ （少なくとも一方が成立、両方正しくても可）.

5. $\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi :\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi$ かつ $\mathcal{M} \models \psi$.

6. $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi :\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi$ ならば $\mathcal{M} \models \psi \Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \varphi$ または $\mathcal{M} \models \psi$.

7. $\mathcal{M} \models \exists v\varphi :\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi[v := c_a]$ となる $a \in M$ が存在する.

8. $\mathcal{M} \models \forall v\varphi :\Leftrightarrow$ 任意の $a \in M$ について $\mathcal{M} \models \varphi[v := c_a]$.

当たり前の定義である：各論理記号はその読み方通りの意味を持ち、言語 L の各記号は、構造 $\mathcal{M}$ での解釈に沿って解釈されている。また、$a \in M$ の名前 c_a はその名の通り a を表している。

命題 2.8 言語 $\mathrm{L}(\mathcal{M})$ の閉式 t の構造 $\mathcal{M}$ での値を $a = t^{\mathcal{M}} \in M$ とする。c_a を a の名前として次が成立。

1. s を $\mathrm{L}(\mathcal{M})$ の式でその変数は（高々）v のみとすると、

$$(s[v := t])^{\mathcal{M}} = (s[v := c_a])^{\mathcal{M}}.$$

2. φ を $\mathrm{L}(\mathcal{M})$ の論理式でその自由変数は（高々）v のみとすると、

$$\mathcal{M} \models \varphi[v := t] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi[v := c_a].$$

従って、$\mathcal{M} \models \varphi[v := t] \Rightarrow \mathcal{M} \models \exists v\varphi$.

証明.
2.8.1. $t^{\mathcal{M}} = a = (c_a)^{\mathcal{M}}$ を用いて、式 s の長さについての帰納法でわかる。
2.8.2. 論理式 φ の長さに関する帰納法。φ が原子論理式のときには、命題 2.8.1 によれ。 □

定義 2.9 L を言語とする。L-閉論理式の集合を (L-)<u>公理系 *(theory)*</u> と呼ぶ。以下 T は L-公理系であるとする。

1. どんな $\varphi \in \mathrm{T}$ も L-構造 $\mathcal{M}$ で充たされる $\mathcal{M} \models \varphi$ とき、$\mathcal{M}$ は T の<u>モデル *(model)*</u> であるという。これを $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$ と書き表す。

2. T の任意のモデルが L-閉論理式 φ を充たすとき、$\mathrm{T} \models \varphi$ と書き、φ は T の論理的帰結 *(φ is a logical consequence of* T*)* あるいは φ は T の定理であるという。

   φ が閉論理式でない場合には、その 全称閉包 *(universal closure)* を

$$\varphi^{\forall} :\equiv \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi\,(x_1, \ldots, x_n \text{ は } \varphi \text{ のパラメタ})$$

   として

$$T \models \varphi :\Leftrightarrow T \models \varphi^{\forall}$$

   と定める。

   とくに $T = \emptyset$ のときには $\models \varphi$ と書く。これは φ が 論理的に正しい ということを意味する。

3. $\models \varphi \leftrightarrow \psi (:\equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$ のとき、論理式 φ と ψ は 論理的に同値 であると言われる。

4. L-公理系 T と L'-公理系 T' を考える。

   記号の集まりとして $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{L}'$ で、かつどんな L-論理式 φ についても

$$\mathrm{T} \models \varphi \Rightarrow \mathrm{T}' \models \varphi \tag{24}$$

   となっているとき、公理系 T' は T の 拡大 *(extension)* であるという。

   T の拡大 T' が 保存拡大 *(conservative extension)* であるのは、*(24)* の逆が任意の L-論理式 φ で成立

$$\mathrm{T} \models \varphi \Leftarrow \mathrm{T}' \models \varphi$$

   するとき。

定義 2.10 1. 論理式 φ に量化記号 $\exists, \forall$ が現れないとき、φ は 量化記号なし *(quantifier-free)* と呼ばれる。

2. 量化記号なしの θ について、$\exists x_1 \cdots \exists x_n \theta\,(n \geq 0)$ の形の論理式を $\exists$-論理式*(existential formula)* といい、$\forall x_1 \cdots \forall x_n \theta$ の形の論理式を $\forall$-論理式*(universal formula)* という。

2.0.1 演習

1. はじめに量化記号がいくつか並んでその後が量化記号なしの論理式である形

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \theta\,(n \geq 0,\ Q_i = \exists, \forall,\ \theta \text{ には量化記号なし})$$

を 冠頭標準形(prenex normal form) の論理式という。量化記号なしの θ をこの論理式の 母式(matrix) という。

各論理式 φ と論理的に同値な冠頭標準形の論理式がつくれることを示せ。

（解答）論理式 φ の長さに関する帰納法で求める冠頭標準形の論理式をつくればよい。その際に、ド・モルガンの法則

$$\models \neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi \tag{25}$$
$$\models \neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$$

と次を用いよ：

$$\models (\exists x\varphi \vee \exists x\psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \vee \psi) \tag{26}$$
$$\models (\exists x\varphi \wedge \exists y\psi) \leftrightarrow \exists x\exists y(\varphi \wedge \psi)\,(x \not\equiv y)$$

3 コンパクト性定理

この節では初めに、命題論理 (propositional logic) を解説し、そのコンパクト性定理を証明する。次に、1 階論理の問題を命題論理のそれに帰着させるヘンキン (L. Henkin) による方法を説明する。1 階論理のコンパクト性定理 3.14 はこの方法からすぐに出てくる。

3.1 命題論理

ここでは、命題結合子 $\vee, \wedge\neg, \rightarrow$ のみを分析する命題論理を説明する。

初めに、空でない集合 I を固定する。I の元は 素論理式 (prime formula) とか 命題変数 (propositional variable) と呼ばれる。つまりこれらはある命題を表しているのだが、その中身については詮索しない、ということ。以下、素論理式を表わすのに p, q, r あたりの文字を使う。

I 上の（命題論理の）論理式を定義する。

定義 3.1 (Cf. 定義 2.4.)

1. 各素論理式 $p \in \mathrm{I}$ は論理式。
2. 論理式 A, B について、$\neg A, (A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B)$ はいずれも論理式。
3. 以上によって論理式と分る記号列のみが論理式である。

次に、論理式の真偽がどのようにその構成要素=素論理式に依存するかを述べる。さらに、論理式が素論理式の真偽によらずいつでも真となるかどう

かの判定法を示す。このような論理式は トートロジー (tautology) と呼ばれる。形だけから真であることが分る論理式のことである。

付値 (truth assignment) とは、関数 $\nu : \mathrm{I} \to 2 := \{0, 1\}$ のこと。ここで、0 は偽 を表わし、1 は真 を表わしている。

付値 ν は、I 上の論理式全体の上の関数 $\bar{\nu} : A \mapsto \bar{\nu}(A) \in 2$ に一意的に拡張される：

1. $\bar{\nu}(A) = \nu(A)$, $A \in \mathrm{I}$ のとき。
2. $\bar{\nu}(\neg A) = 1 - \bar{\nu}(A)$.
3. $\bar{\nu}(A \vee B) = \max\{\bar{\nu}(A), \bar{\nu}(B)\}$.
4. $\bar{\nu}(A \wedge B) = \min\{\bar{\nu}(A), \bar{\nu}(B)\}$.
5. $\bar{\nu}(A \to B) = \max\{1 - \bar{\nu}(A), \bar{\nu}(B)\} (= \bar{\nu}(\neg A \vee B))$.

関数 $\bar{\nu}$ は付値 ν から一意的に決まるので ν と同一視して単に ν と書く。

定義 3.2 （命題論理の）論理式 A が トートロジー *(tautology)* であるとは、任意の付値 ν について $\nu(A) = 1$ となること。

論理式 A, B について $A \leftrightarrow B \, (:\equiv (A \to B) \wedge (B \to A))$ がトートロジーであるとき、A と B は 命題論理で同値 *(truth functionally equivalent)* と呼ぶ。

また、$\nu(A) = 1$ となる付値 ν が存在するとき、A は 充足可能 *(satisfiable)* という。

さらに、論理式の集合 T が 充足可能 *(satisfiable)* とは、それらを一挙に充たす付値 ν, $\forall A \in T(\nu(A) = 1)$ が存在すること。

付値そのものは、集合 I が無限であれば無限にある。しかし各論理式 A については関係する付値は有限個しかない：$A \equiv A[p_1, \ldots, p_n]$ に現れている素論理式たち全部（常に有限個！）を $\{p_1, \ldots, p_n\}$ とすれば、付値 ν, μ について次は容易に確かめられる：

$$\forall i[1 \leq i \leq n \to \nu(p_i) = \mu(p_i) \Rightarrow \nu(A) = \mu(A)].$$

従って A にとっては 2^n 個の付値しか存在しないも同然である。

このことから、与えられた論理式がトートロジーか否か [充足可能か否か] 機械的に判定する方法がつくれた：単に 2^n 個の付値 ν 全部について、真偽値 $\nu(A)$ を計算してみればよい。真偽値 $\nu(A)$ は、素論理式 $\{p_1, \ldots, p_n\}$ に $\nu(p_i) \in \{0, 1\}$ を代入して計算する。この計算結果を表にまとめたものを論理式 A の 真理表 (truth table) という。n 個の素論理式を含む論理式の真理表は全部で 2^{2^n} 個ある。

また論理式 $A \equiv A[p_1, \ldots, p_n]$ は真理関数 $f_A : 2^n \to 2$ とみなせる。つまり $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in 2^n$ について、付値 $\nu_{\bar{b}}$ を $\nu_{\bar{b}}(p_i) = b_i$ で定めて、$f_A(\bar{b}) := \nu_{\bar{b}}(A)$ とすればよい。

トートロジーの例 ($A \leftrightarrow B$ は $(A \to B) \wedge (B \to A)$ の略)

$$
\begin{aligned}
A \vee \neg A &\quad \text{(排中律)} \\
\neg(A \wedge \neg A) &\quad \text{(矛盾律)} \\
\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B &\quad \text{(de Morgan の法則)} \\
\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B & \\
\neg\neg A \leftrightarrow A &\quad \text{(二重否定の除去)}
\end{aligned}
$$

3.2 命題論理のコンパクト性定理

定理 3.3 (命題論理のコンパクト性定理)
命題論理の論理式の集合 T が充足可能なのは、その任意の有限部分集合が充足可能なときである。

証明. T が充足可能なら、その任意の（有限）部分集合も充足可能なのは明らか。

以下、T の任意の有限部分集合は充足可能とする。このような T を有限充足可能 (finitely satisfiable) と呼ぶことにする。

問題を逆に考えてみる：もし T が充足可能として、ν を T を充たす付値としてみる。このとき、ν によって正しくなる論理式全体の集合 $S_\nu := \{A : \nu(A) = 1\}$ を考えると、$T \subseteq S_\nu$ となる。そこでこのような論理式の集合 S_ν が持つべき性質を明らかにして、有限充足可能な T がその性質を持つ集合に拡張できることを示せばよい。その性質を極大 (maximal) と呼び、論理式の集合 S が極大であることを以下が成り立つことと定義する：

1. S は有限充足可能、かつ
2. 各論理式 A について $A \in S$ か $\neg A \in S$ となっている。

Claim 1 論理式の集合 S について、S が極大であるとき、その時に限り $S = S_\nu$ となる付値 ν が存在する。

Claim 1 の **証明**. 明らかにどんな付値 ν についても S_ν は極大である。

逆に S は極大であると仮定する。この時、付値 ν を

$$
\begin{aligned}
\nu(p) = 1 \quad &:\Leftrightarrow \quad p \in S \\
\nu(p) = 0 \quad &:\Leftrightarrow \quad p \notin S
\end{aligned}
$$

で定める。するとどんな論理式 A についても

$$\nu(A) = 1 \Leftrightarrow A \in S \tag{27}$$

が、論理式 A の長さに関する数学的帰納法で証明できる。これより $S_\nu = S$ となる。

(27) を示すのに、以下を確かめよ：

$$\begin{aligned} B \in S &\Leftrightarrow \neg B \notin S \\ A \vee B \in S &\Leftrightarrow A \in S \text{ または } B \in S \\ A \wedge B \in S &\Leftrightarrow A \in S \text{ かつ } B \in S \\ A \to B \in S &\Leftrightarrow A \notin S \text{ または } B \in S \end{aligned}$$

例えば、$B \in S \Rightarrow \neg B \notin S$ は、もし $\{B, \neg B\} \subseteq S$ なら S が有限充足可能であることに反す。逆は S の極大性から分る。

もう一つ、二番目の同値を考える。初めに $A \vee B \in S$ だが $A \notin S$ かつ $B \notin S$ としてみる。すると極大性より、$\neg A \in S$ かつ $\neg B \in S$ となるが、$\{A \vee B, \neg A, \neg B\} \subseteq S$ は明らかに充足不可能である。逆に $A \in S$ だが $A \vee B \notin S$ とすると、$\{A, \neg(A \vee B)\} \subseteq S$ は充足不可能である。

これで Claim 1 が分った。 □

一般に次が成り立つ。

補題 3.4 S を有限充足可能な論理式の集合で、論理式 A について $S \cup \{A\}$ は有限充足不可能とする。この時、$S \cup \{\neg A\}$ は有限充足可能である。

補題 3.4 の **証明**. $S \cup \{\neg A\}$ が有限充足可能であることをみるために S の有限部分 S_0 を勝手に取り、$S_0 \cup \{\neg A\}$ が充足可能であることを示そう。

S が有限充足可能なのに $S \cup \{A\}$ は有限充足不可能ということは、S のある有限部分 S_1 について $S_1 \cup \{A\}$ は充足不可能ということ。付値 ν を $S_0 \cup S_1$ を充たすように取ると、$\nu(A) = 0$ つまり $\nu(\neg A) = 1$ となり、この ν が $S_0 \cup \{\neg A\}$ を充たす。これで補題 3.4 は証明された。 □

さて、Claim 1 によって我々の目標が定まった：

補題 3.5 有限充足可能な T は極大な S に拡張できる $S \supseteq T$.

(素論理式の集合 I が高々可算の場合の補題 3.5 の証明)

I が高々可算とすると論理式全体の集合も可算であるから (cf. (23))、それらを一列に並べて $A_0, A_1, \ldots$ とする。論理式の集合の増加列 $T_0 \subseteq T_1 \subseteq \cdots$ を以下のように定義する：

$$\begin{aligned} T_0 &:= T \text{ (初めに与えられた有限充足可能な集合)} \\ T_{n+1} &:= \begin{cases} T_n \cup \{A_n\} & \text{もしこれが有限充足可能なら} \\ T_n \cup \{\neg A_n\} & \text{そうでないとき} \end{cases} \end{aligned}$$

補題 3.4 により各 T_n は有限充足可能である。よって $S := \bigcup_n T_n$ もそうである。この S が求めるものであることを示す。$T \subseteq S$ は明らかだから S の

極大性を示す。論理式 A を勝手に取る。A は上のリストに入っているから $A \equiv A_n$ となる n が取れる。$A_n \in S$ または $\neg A_n \in S$ を示す。

もし $T_n \cup \{A_n\}$ が有限充足可能なら、定義より $A_n \in T_{n+1} \subseteq S$ で OK。そうでなければ再び定義より $\neg A_n \in T_{n+1} \subseteq S$ となる。

（素論理式の集合 I が一般の場合の補題 3.5 の証明）

可算の場合と発想は同じだがツォルンの補題（選択公理）を使う。

有限充足可能な論理式の集合 S で $S \supseteq T$ なるものたちを $S_0 \subseteq S_1$ で順序付ける。この順序 $\subseteq$ は帰納的（=全順序部分集合 $\{S_j\}_{j \in J}$ は上限 $\sup_{j \in J} S_j = \bigcup_j Sj$ を有す）なので、ツォルン の補題により極大元 S がある。この S が上で定義した意味で極大であることを示せば証明は終わる。

A を論理式として $A \notin S$ と仮定して $\neg A \in S$ を導こう。S は順序 $\subseteq$ の意味で極大だから $A \notin S$ なら $S \cup \{A\}$ は有限充足不可能である。

よって補題 3.4 より $S \cup \{\neg A\}$ は有限充足可能。S の極大性より、これは $\neg A \in S$ を意味する。 □

3.2.1 演習

1. （命題論理のコンパクト性定理の別証明）素論理式全体の集合を I とする。I 上の命題論理の論理式の集合 T で有限充足可能なものをとる。

   $2 = \{0, 1\}$ に離散位相を入れて直積空間 2^I(Cantor 空間) を考えると、Tychonoff の定理（「コンパクト位相空間たちの積はコンパクト」は Zorn の補題と同値）より、2^I はコンパクト Hausdorff 空間になる。この位相での開基 (open base) は、I の有限部分集合 I_0 上の関数 $s : I_0 \to 2$ について

   $$\{\nu \in 2^I : s \subseteq \nu\} = \{\nu \in 2^I : \forall i \in I_0[s(i) = \nu(i)]\}$$

   の形の集合たちであり、これらは開かつ閉である (clopen) であることに注意せよ。

   よって有限交叉性を持つ閉集合族 $\{F_j\}_{j \in J}$ $(F_{j_0} \cap \cdots \cap F_{j_n} \neq \emptyset)$ の共通部分は空でない $\bigcap_{j \in J} F_j \neq \emptyset$.

   そこで命題論理の論理式 A について

   $$F_A := \{\nu \in 2^I : \nu(A) = 1\}.$$

   とおく。

   (a) 各論理式 A について、集合 F_A は開かつ閉である。

   (b) これより $\bigcap\{F_A : A \in T\} \neq \emptyset$ を結論し、命題論理のコンパクト性定理の別証明を与えよ。

2. 逆に、命題論理のコンパクト性定理を用いて積空間 2^I がコンパクトになることを示せ。

3. (命題論理の論理式の 和積標準形 (DNF, Disjunctive Normal Form) と 積和標準形 (CNF, Conjunctive Normal Form)) 命題論理の論理式 A について、リテラルの（有限）集合族 $\{L_{ij} : 1 \leq i \leq n_j, 1 \leq j \leq m\}$ (各 L_{ij} はリテラル) で、$\{L_{ij} : 1 \leq i \leq n_j\}$ を $\wedge$ で結んだ論理式たち $L_{1j} \wedge \cdots \wedge L_{n_j j}$ を $\vee$ で結んだ

$$\bigvee_j \bigwedge \{L_{ij} : 1 \leq i \leq n_j\} \tag{28}$$

で A と命題論理で同値になるものがつくれることを示せ。

(28) の形の論理式を和積標準形の論理式、A と同値になる和積標準形の論理式を A の和積標準形（のひとつ）という。

さらに 論理式 A について、リテラルの（有限）集合族 $\{R_{ij} : 1 \leq i \leq p_j, 1 \leq j \leq q\}$ で、

$$\bigwedge_j \bigvee \{R_{ij} : 1 \leq i \leq p_j\} \tag{29}$$

で A と命題論理で同値になるものがつくれることを示せ。

（解）$b \in 2$ と 命題変数 p について

$$p^b := \begin{cases} p & b = 1 \\ \neg p & b = 0 \end{cases}$$

とおく。

$A[p_1, \ldots, p_n]$ を真理関数 $f_A : 2^n \to 2$ とみて逆像 $f_A^{-1}(1)$ を考える。$\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in f_A^{-1}(1)$ についてリテラルの積 $C(\bar{b}) :\equiv \bigwedge\{p_i^{b_i} : 1 \leq i \leq n\}$ を考えて、それらの和 $\bigvee_{\bar{b} \in f_A^{-1}(1)} C(\bar{b})$ を取れば、これが求める A の和積標準形である。なぜなら付値 ν について $\nu(p^b) = 1 \Leftrightarrow \nu(p) = b$ であるから、$\nu(C(\bar{b})) = 1 \Leftrightarrow (\nu(p_1), \ldots, \nu(p_n)) = \bar{b}$. よって

$$\begin{aligned} \nu(\bigvee_{\bar{b} \in f_A^{-1}(1)} C(\bar{b})) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (\nu(p_1), \ldots, \nu(p_n)) \in f_A^{-1}(1) \\ &\Leftrightarrow \quad \nu(A) = 1 \end{aligned}$$

A の積和標準形を求めるには、$\neg A$ の和積標準形 $\bigvee_j \bigwedge\{A_{ij} : 1 \leq i \leq n_j\}$ の否定を、ド・モルガンの法則と二重否定の除去を用いて積和標準形 $\bigwedge_j \bigvee\{\bar{A}_{ij} : 1 \leq i \leq n_j\}$ に直せばよい。ただしリテラル L について $\bar{L}$ は、L が素論理式 R なら否定 $\neg R$ を表し、L が素論理式の否定 $\neg R$ なら $\bar{L} :\equiv R$ を表す。

4. （エルブラン (Herbrand) の定理の最も簡単な形）

T を $\forall$-閉論理式から成る公理系とする。いま $\exists$-論理式 $\exists x_1 \cdots \exists x_n\, \theta(x_1, \ldots, x_n)$ (θ:量化記号なし) について $\mathrm{T} \models \exists x_1 \cdots \exists x_n\, \theta(x_1, \ldots, x_n)$ とする。このとき式の列 $(t_1^j, \ldots, t_n^j)$ の有限列が存在して

$$\mathrm{T} \models \bigvee \{\theta(t_1^j, \ldots, t_n^j) : 1 \leq j \leq m\}$$

となる。

3.3 Henkin 定数

ここでは再び 1 階論理を扱う。L を言語とし、I を原子論理式か量化記号 $\exists, \forall$ で始まる L-論理式全体の集合とする。これらの論理式 I がここでの素論理式となる。よって 1 階論理のトートロジー (tautology of first-order logic) とは、その素論理式にいかなる付値を与えても真=1 となるような論理式のことである。例えば

$$\begin{aligned} \forall x R(x) \quad &\vee \quad \neg \forall x R(x), \\ \neg(\forall x R(x) \wedge \exists x S(x)) \quad &\leftrightarrow \quad (\neg \forall x R(x) \vee \neg \exists x S(x)), \end{aligned}$$

はともにトートロジーだが

$$\begin{aligned} c \quad &= \quad c, \\ \forall x (R(x) \quad &\vee \quad \neg R(x)), \\ \neg \exists x S(x) \quad &\rightarrow \quad \forall x \neg S(x) \end{aligned}$$

はいずれもトートロジーに非ず。初めの二つはともに素論理式 p で、三つ目は $\neg p \rightarrow q$ の形だから。

補題 3.6 L を言語、$\mathcal{M}$ を L-構造とする。名前付きの言語 $\mathrm{L}(\mathcal{M})$ の閉（かつ）素論理式に対する付値 ν で、どんな $\mathrm{L}(\mathcal{M})$-閉論理式 φ についても

$$\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \bar{\nu}(\varphi) = 1$$

となるものが（一意的に）存在する。

特に、モデルを持つ L-閉論理式の集合は（命題論理の意味で）充足可能である。

証明. 明らかに求める付値 ν は、閉素論理式 φ について

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \varphi \quad &\Rightarrow \quad \nu(\varphi) = 1 \\ \mathcal{M} \not\models \varphi \quad &\Rightarrow \quad \nu(\varphi) = 0 \end{aligned}$$

と定めるしかなく、これでよい。 □

補題 3.6 の後半の逆は成り立たない。例えば次の閉論理式の集合

$$\{\forall x(R(x) \to S(x)), \forall x R(x), \neg\forall x S(x)\}$$

は命題論理では $\{p, q, \neg r\}$ だから充足可能だが、モデルは無い。

言語 L の ヘンキン拡張 (witnessing expansion) と呼ばれる拡張 $\mathrm{L}(C)$ を、L に定数を（一杯）付加してつくる：$\mathrm{L}(C) = \mathrm{L} \cup C$, C は定数の集合。

帰納的につくる。初めに $C_0 = \emptyset$ として、C_n が既に定義されたら $\mathrm{L}_n = \mathrm{L} \cup C_n$ と定める。L_n が既に定義されたら C_{n+1} を次のように決める：L_n-閉論理式で量化記号 $\exists$ で始まっている閉論理式 $\exists x\varphi(x)$ を取り、それに対応して一つ新たに定数 $c_{\exists x\varphi(x)}$ をつくる。但しここで、閉論理式 $\exists x\varphi(x)$ に対応する定数 $c_{\exists x\varphi(x)}$ が既に前の段階で導入されていたら、これはする必要がないし、また、定数 $c_{\exists x\varphi(x)}$ は閉論理式 $\exists x\varphi(x)$ 毎にそれ固有に入れるので、閉論理式が異なれば記号として違うものと理解する。つまらない例で恐縮だが、定数 $c_{\exists x(x=x)}, c_{\exists y(y=y)}\ (y \not\equiv x), c_{\exists x(x=x\wedge x=x)}$ はみな互いに異なる。このようにして導入された定数 $c_{\exists x\varphi(x)}$ 全部と C_n との合併を C_{n+1} とする。最後に、$C = \bigcup_n C_n$, $\mathrm{L}(C) = \mathrm{L} \cup C$ と定める。

定義 3.7 定数 $c_{\exists x\varphi(x)}$ は ヘンキン定数 *(witnessing constant)* と呼ばれ、その意図は次の ヘンキン公理 *(Henkin axiom)* から判る：

$$\exists x\varphi(x) \quad \to \quad \varphi(c_{\exists x\varphi(x)}) \tag{30}$$

$$\varphi(c_{\exists\neg\varphi(x)}) \quad \to \quad \forall x\varphi(x) \tag{31}$$

何を意図しているかもう明らかだろう。$\exists x\varphi(x)$ が（ある構造で）正しければその証拠 (witness) となる品 a がありこれが φ を満たす: $\varphi(a)$ が真、だからそれに新しい名前をくっ付けて $c_{\exists x\varphi(x)}$ と呼びましょう、といことだ。もう一つのほうは、もし $\forall x\varphi(x)$ が間違っていたらその反例、つまり $\exists x\neg\varphi(x)$ の例に名前 $c_{\exists\neg\varphi(x)}$ を付けました。$\forall x\varphi(x)$ と $\exists x\neg\varphi(x)$ は論理的に同値であることに注意。

定義 3.8 Henkin は $\mathrm{L}(C)$-閉論理式の集まりで、上の Henkin 公理と以下の量化公理 *(quantifier axiom)* より成る：$\mathrm{L}(C)$ の閉式 t について

$$\varphi(t) \quad \to \quad \exists x\varphi(x) \tag{32}$$

$$\forall x\varphi(x) \quad \to \quad \varphi(t) \tag{33}$$

次の補題 3.10 で示すように、勝手に与えられた L-構造 $\mathcal{M}$ は、ヘンキン定数を適当に解釈してやれば、Henkin のモデルにできる。

定義 3.9 一般に、L と L′ を言語とし、記号の集合として、$\mathrm{L} \subseteq \mathrm{L}'$ とする。また、$\mathcal{M}' = \langle M; F' \rangle$ を L′-構造とする。F' は L′ の記号を解釈するための

L' を定義域とする写像であった, *cf.* 定義 *2.1.* いま $F'|\mathrm{L}$ を F' の定義域 L' を L に制限した写像とする。要するに $F'|\mathrm{L}$ では $\mathrm{L}'-\mathrm{L}$ の記号は解釈しない。この時、L-構造 $\mathcal{M}=\langle M;F'|\mathrm{L}\rangle$ を $\mathcal{M}'$ の L への <u>縮小</u>*(reduct)* と言い、逆に $\mathcal{M}'$ を $\mathcal{M}$ の L' への <u>拡張</u>*(expansion)* と言う。

簡単な注意を一つ。任意の L-閉論理式 φ について

$$\mathcal{M}\models\varphi\Leftrightarrow\mathcal{M}'\models\varphi \tag{34}$$

当たり前である：L-閉論理式の真偽はその中の L の記号の解釈と変数の変域で決まるから。

補題 3.10 $\mathcal{M}=\langle M;\ldots\rangle$ を L-構造、$\mathrm{L}(C)$ を L のヘンキン拡張とする。C に属するヘンキン定数たちに適当に M の元を対応させると、Henkin のモデルである $\mathcal{M}$ の $\mathrm{L}(C)$ への拡張 $\mathcal{M}'$ が得られる。

証明. 量化公理 (32), (33) はどうやってもいつでも正しいから、ヘンキン公理 (30), (31) だけ考える。

初めに (30) だけ考えればよいことに注意する。もし拡張 $\mathcal{M}'$ で (30) が全部正しくなっていたとしよう。このとき (31) も正しくなる。

$$\varphi(c_{\exists\neg\varphi(x)})\to\forall x\varphi(x)$$

の対偶をとって

$$\neg\forall x\varphi(x)\to\neg\varphi(c_{\exists\neg\varphi(x)}).$$

これは次の (30) と論理的に同値（どんな構造でも真偽値が一致）だからよい：

$$\exists x\neg\varphi(x)\to\neg\varphi(c_{\exists x\neg\varphi(x)}).$$

そこで公理 (30) を正しくするようにヘンキン定数 $c_{\exists x\varphi(x)}$ の解釈 $(c_{\exists x\varphi(x)})^{\mathcal{M}'}\in M$ を、ヘンキン定数の構成に沿って帰納的に決めていく。

$\mathcal{M}_0=\mathcal{M}$ として、言語 $\mathrm{L}_n=\mathrm{L}\cup C_n$ を解釈する L_n-構造 $\mathcal{M}_n$ が既につくられたとする。この時、$C_{n+1}-C_n$ の元 $c_{\exists x\varphi(x)}$ に M の元を次のように対応させる。初めに公理の前提 $\exists x\varphi(x)$ は L_n-閉論理式であったことを思い出す。だからそれの $\mathcal{M}_n$ での真偽はもう決まっている。場合分け：$\mathcal{M}_n\models\exists x\varphi(x)$ となっていたら、その例となる $a\in M$ を一つ任意に取る。$\mathcal{M}_n\models\varphi(c_a)$ となっている。そこで $(c_{\exists x\varphi(x)})^{\mathcal{M}_{n+1}}=a$ と決める。次に $\mathcal{M}_n\not\models\exists x\varphi(x)$ なら $c_{\exists x\varphi(x)}$ に M の元をどれでもいいから対応させる。こうして $C_{n+1}-C_n$ の元 $c_{\exists x\varphi(x)}$ に M の元を対応させて $\mathcal{M}_n$ の L_{n+1} への拡張 $\mathcal{M}_{n+1}$ ができた。

こうすると、注意 (34) により $\mathcal{M}_{n+1}$ で $\exists x\varphi(x)\to\varphi(c_{\exists\varphi(x)})$ は正しくなる。

これをずっと続けて $\mathcal{M}$ の $\mathrm{L}(C)$ への拡張 $\mathcal{M}'$ が得られ、そこでヘンキン公理 (30) はみな正しくなる。 □

$\mathrm{L}(C)$-<u>標準構造 (canonical structure)</u> とは、$\mathrm{L}(C)$-構造 $\mathcal{M}=\langle M;\ldots\rangle$ でどの元 $a\in M$ もある定数 $c\in C$ で表示されていること：$M=\{c^{\mathcal{M}}:c\in C\}$.

定義 3.11 等号公理 *(equality axioms)* は次の形のいずれか。ここに $t, s, t_1, \ldots$ は $\mathrm{L}(C)$ の閉式で R は L の n-変数関係記号、f は L の n-変数関数記号：

$$\begin{aligned} t &= t \\ t = s &\rightarrow s = t \\ t_1 = t_2 \wedge t_2 = t_3 &\rightarrow t_1 = t_3 \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} t_1 = s_1 \wedge \cdots \wedge t_n = s_n &\rightarrow R(t_1, \ldots, t_n) \rightarrow R(s_1, \ldots, s_n) \\ t_1 = s_1 \wedge \cdots \wedge t_n = s_n &\rightarrow f(t_1, \ldots, t_n) = f(s_1, \ldots, s_n) \end{aligned} \tag{36}$$

初めの三つは等号 $=$ が同値関係であることを言っており、あとの二つは合同関係であることを保証することになる。

等号公理のいずれも、どんな $\mathrm{L}(C)$-構造 $\mathcal{M}$ でも正しい。等号公理全体の集合を Eq と書くことにする。

次の 補題 3.12 での 1 と 3 が同値である事実により、1 階論理の問題を命題論理のそれに帰着させ得ることになる。T が有限でも $T \cup \mathtt{Henkin} \cup \mathrm{Eq}$ は無限になることに注意。

補題 3.12 L を言語、$\mathrm{L}(C)$ を L のヘンキン拡張とする。L-閉論理式の集合 T について以下の三つは互いに同値：

1. T はモデルを持つ。

2. T のモデルになる $\mathrm{L}(C)$-標準構造 $\mathcal{M}$ が存在する。

3. $T \cup \mathtt{Henkin} \cup \mathrm{Eq}$ を命題論理の論理式の集合とみなして、充足可能。

証明. $2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ の順でみていく。

2 から 1 が出てくることは $\mathcal{M}$ の L への縮小を考えればよい。

1 を仮定して、3 をみるには、先ず T のモデル $\mathcal{M}$ を補題 3.10 により $\mathrm{L}(C)$-構造 $\mathcal{M}'$ に $T \cup \mathtt{Henkin} \cup \mathrm{Eq}$ のモデルとなるように拡張し、補題 3.6 を使えばよい。

以下、3 を仮定して 2 を示す。$\mathrm{L}(C)$ の素論理式への付値 ν で、任意の $\varphi \in T \cup \mathtt{Henkin} \cup \mathrm{Eq}$ について $\nu(\varphi) = 1$ となるものを取る。標準構造 $\mathcal{M} = \langle M; \ldots \rangle$ を、どんな $\mathrm{L}(C)$-閉論理式 φ についても

$$\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \nu(\varphi) = 1 \tag{37}$$

となるようにつくりたい。

(M の定義)

$\mathrm{Ct}(C)$ を言語 $\mathrm{L}(C)$ の閉式全体の集合とする。$\mathrm{Ct}(C)$ 上の関係 $\simeq$ を

$$t \simeq s :\Leftrightarrow \nu(t = s) = 1$$

で定める。これが同値関係になることは、ν が Eq 就中 (35) を正しくすることから分かる。$[t]$ を t を代表元とするこの同値関係 $\simeq$ による同値類として、$M = \mathrm{Ct}(C)/\simeq = \{[t] : t \in \mathrm{Ct}(C)\}$ と定める。
(関係記号 R の解釈)
n-変数関係記号 R に対し、$R^{\mathcal{M}}$ を

$$\langle [t_1], \ldots, [t_n] \rangle \in R^{\mathcal{M}} :\Leftrightarrow \nu(R(t_1, \ldots, t_n)) = 1 \tag{38}$$

で定める。これが代表元 $t_1, \ldots, t_n$ の選び方に依らずに決まることをみるには

$$[t_1] = [s_1], \ldots, [t_n] = [s_n] \text{ かつ } \nu(R(t_1, \ldots, t_n)) = 1 \text{ ならば } \nu(R(s_1, \ldots, s_n)) = 1$$

を示さないといけないが、$[t] = [s] \Leftrightarrow t \simeq s \Leftrightarrow \nu(t = s) = 1$ に注意して、(36) の最初のが ν で正しくなることからよい。
(関数記号 f の解釈)
n-変数関数記号 f と $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{Ct}(C)$ に対し、

$$f^{\mathcal{M}}([t_1], \ldots, [t_n]) := [f(t_1, \ldots, t_n)] \tag{39}$$

と定める。

$\nu(t_1 = s_1) = \cdots = \nu(t_n = s_n) = 1$ ならば $\nu(f(t_1, \ldots, t_n) = f(s_1, \ldots, s_n)) = 1$ となることが (36) の二番目より分かるのでこれで M 上の n-変数関数 $f^{\mathcal{M}}$ が定義できた。
(定数 c の解釈 $c^{\mathcal{M}}$)
$\mathrm{L}(C)$ の定数 c について $c^{\mathcal{M}} = [c]$ とする。
(標準構造であること)
以上により $\mathrm{L}(C)$-構造 $\mathcal{M}$ がつくれた。これが標準構造になっていることをみるには、どんな閉式 $t \in \mathrm{Ct}(C)$ についても $t \simeq c$ つまり

$$c \in C \text{ で } \nu(t = c) = 1 \text{ となるものが存在する} \tag{40}$$

ことを示せばよい。先ず、論理式 $\varphi(x) :\equiv (t = x)$ として、$\nu(\exists x \varphi(x)) = 1$ を示す。

初めに (35) の一番目から $\nu(t = t) = 1$ つまり $\nu(\varphi(t)) = 1$. そこで量化公理 (32) から $\nu(\exists x \varphi(x)) = 1$ が分かる。

これとヘンキン公理 (30) よりヘンキン定数 $c \equiv c_{\exists x \varphi(x)} \equiv c_{\exists x (t = x)}$ について $\nu(\varphi(c)) = 1$ つまり $\nu(t = c) = 1$ となり (40) が示せた。
((37) の証明)
初めに $\mathrm{L}(C)$-原子閉論理式について (37) を示そう。先ず、等式について。$\mathcal{M} \models t = s \Leftrightarrow t^{\mathcal{M}} = s^{\mathcal{M}}$ と $[t] = [s] \Leftrightarrow \nu(t = s) = 1$ より、任意の閉式 $t \in \mathrm{Ct}(C)$

$$t^{\mathcal{M}} = [t] \tag{41}$$

を示せばよい。これを t の長さに関する帰納法で示そう。t が定数 c の場合は定義そのもの。t が $f(t_1,\ldots,t_n)$ として、帰納法の仮定より、$t_i^{\mathcal{M}} = [t_i]\,(i=1,\ldots,n)$. これと関数 $f^{\mathcal{M}}$ の定義 (39) から $t^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}},\ldots,t_n^{\mathcal{M}}) = f^{\mathcal{M}}([t_1],\ldots,[t_n]) = [f(t_1,\ldots,t_n)] = [t]$. これで (41) が示せた。

次に等式以外の原子閉論理式 $R(t_1,\ldots,t_n)$. 定義 (38) と (41) より

$$\mathcal{M} \models R(t_1,\ldots,t_n) \Leftrightarrow \langle t_1^{\mathcal{M}},\ldots,t_n^{\mathcal{M}}\rangle \in R^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow$$
$$\langle [t_1],\ldots,[t_n]\rangle \in R^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \nu(R(t_1,\ldots,t_n)) = 1$$

で OK.

これで原子閉論理式については (37) が示せた。

一般の場合については、閉論理式に現れる論理結合子の個数に関する帰納法を用いる。閉論理式が量化記号で始まる場合だけ考える。

初めに $\nu(\exists x\varphi(x)) = 1$ とすると、ヘンキン公理 (30) よりヘンキン定数 $c \equiv c_{\exists x\varphi(x)}$ について $\nu(\varphi(c)) = 1$ となる。帰納法の仮定より $\mathcal{M} \models \varphi(c)$, よって 命題 2.8.2 により $\mathcal{M} \models \exists x\varphi(x)$.

逆に $\mathcal{M} \models \exists x\varphi(x)$ とすると定義より、$\mathcal{M} \models \varphi(c_a)$ となる $a \in M = \mathrm{Ct}(C)/\simeq$ が存在する。閉式 $t \in \mathrm{Ct}(C)$ を $[t] = a$ と取ると、(41) より $t^{\mathcal{M}} = [t] = a$. 従って 命題 2.8.2 から $\mathcal{M} \models \varphi(t)$. 帰納法の仮定より $\nu(\varphi(t)) = 1$ となり、量化公理 (32) から $\nu(\exists x\varphi(x)) = 1$ と結論できる。

$\forall x\varphi(x)$ の形の閉論理式について (37) を示すには、ヘンキン公理 (31) と量化公理 (33) を用いる。 □

定理 3.13 [コンパクト性定理, first version(Gödel-Malcev)]
T を 1 階論理の閉論理式の集合で、そのどんな有限部分 $T_0 \subseteq T$ もモデルを持つとする。この時、T 自身もモデルを持つ。

証明. T のどんな有限部分 $T_0 \subseteq T$ もモデルを持つとする。すると Main Lemma 3.12 からどんな有限 $T_0 \subseteq T$ についても $T_0 \cup \mathtt{Henkin} \cup \mathrm{Eq}$ を命題論理の論理式の集合とみなして、充足可能となる。ここで、命題論理のコンパクト性定理 3.3 より、$T \cup \mathtt{Henkin} \cup \mathrm{Eq}$ も充足可能となるので、再び Main Lemma 3.12 から T がモデルを持つことが結論できる。 □

これを言い換えておくと便利なことがある。

定理 3.14 [コンパクト性定理, second version]
$T \cup \{\psi\}$ を 1 階論理の閉論理式の集合で、$T \models \psi$ であるとする。この時既に、ある有限部分 $T_0 \subseteq T$ について $T_0 \models \psi$ となる。

3.3.1 演習

1. (34) を示せ。

2. 言語 L での公理系 T にヘンキン定数とそれに関するヘンキン公理 (30), (31) を付け加えた L(C)-公理系は、T の保存拡大である。

3. コンパクト性定理, first version とコンパクト性定理, second version が同値であることを示せ。

4 コンパクト性定理の応用

ここではコンパクト性定理の簡単な応用をしてみよう。

公理化不能性

3 節で示されたコンパクト性定理は、公理化不能性を示すためによく用いられる手法である。1 節で述べた結果をこれから導いておこう。

命題 1.1 の**証明**.

$\{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$ をすべてのねじれのないアーベル群で正しい閉論理式とし、ψ をそれらを $\wedge$ で結んだ $(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_k)$ とする。ψ を満たすねじれのあるアーベル群の存在を示したい。

T をねじれのないアーベル群の公理 (2)-(5), (8) $(n = 2, 3, \ldots)$ から成る集合とする。仮定により $T \models \psi$ である。ここでコンパクト性定理, second version 3.14 により、有限部分 $T_0 \subseteq T$ を $T_0 \models \psi$ となるように取る。T_0 はアーベル群の公理 (2)-(5) を含むとしてよいから、これは、十分大きい N を取ると、ψ が (8) $(n = 2, 3, \ldots, N)$ を満たすすべてのアーベル群で正しいことを意味する。そこで素数 $p > N$ についてアーベル群 $\boldsymbol{Z}_p$ (群演算は加法) を考えると、$\boldsymbol{Z}_p$ は明らかに (8) $(n = 2, 3, \ldots, N)$ を満たし、従って ψ も満たすが、明らかにねじれがある、位数が p 以下だから。よってこの $\boldsymbol{Z}_p$ が求めるアーベル群である。 □

命題 1.2 の**証明**.

体の言語での閉論理式 φ がすべての標数 0 の体で成り立つとする。すなわち体の公理 T= (2)-(5), (10), (13) について $T \cup \{p1 =\neq 0 : p : \text{prime}\} \models \varphi$ とする。コンパクト性定理より十分大きい素数 p_0 について $T \cup \{p1 =\neq 0 : p_0 \leq p : \text{prime}\} \models \varphi$ となるから、すべての標数 $p \geq p_0$ の体でも φ は成立することになる。 □

次に大きいサイズのモデルをつくることを考える。構造 $\mathcal{M}$ の濃度とは集合 $|\mathcal{M}|$ の濃度のこととし、これを $\|\mathcal{M}\|$ で書き表す。$\|\mathcal{M}\| < \aleph_0$ のとき $\mathcal{M}$ は有限、さなくば無限と呼ばれる。

定義 4.1 $\mathcal{K}$ を L-構造の集まりとする。$\mathcal{K}$ が [有限] 公理化可能([*finitely*] *axiomatizable*) とは、L-閉論理式の [有限] 集合 T が存在して、どんな L-構造

$\mathcal{M}$ についても、$\mathcal{M} \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \mathrm{T}$ となること。

(例題) 公理系 T が、どんなに大きな有限モデルも持てば、無限モデルを持つことを示せ。

従って有限な構造全体のクラス $\mathcal{K}$ は公理化可能でない。

(解答)

各 $n > 1$ について閉論理式 φ_n を

$$\varphi_n :\Leftrightarrow \exists x_n \cdots \exists x_1 \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j$$

とすれば、どんな構造 $\mathcal{M}$ についても

$$\mathcal{M} \models \varphi_n \Leftrightarrow \|\mathcal{M}\| \geq n$$

となる。

仮定より公理系 $\mathrm{T} \cup \{\varphi_n : n > 1\}$ は有限充足可能だからコンパクト性定理より無限モデル $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$ が存在する。

以下の諸定義で出てくる初等（的）(elementary, elementarily) とは、「1 階論理の」という意味である。論理式には、1 階のもの以外に 2 階、高階、無限の長さをもった論理式なども考えるときがあるので、それと区別したいときに、これらの修飾語をつけるのである。

定義 4.2 L を言語、$\mathcal{M}, \mathcal{N}$ を L-構造とする。

1. *(a)* L-構造 $M = \langle M; \ldots \rangle$ について言語 $\mathrm{L}(M) = L \cup \{c_a : a \in M\}$ での閉論理式の集まり $\mathrm{Diag}_{el}(\mathcal{M})$（$\mathcal{M}$ の<u>初等ダイアグラム</u>*(elementary diagram)*）を

$$\mathrm{Diag}_{el}(\mathcal{M}) := \{\varphi \in \mathrm{L}(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \models \varphi\}$$

で定める。

(b) また $\mathrm{L}(M)$ での閉リテラルの集まり $\mathrm{Diag}(\mathcal{M})$（$\mathcal{M}$ の<u>ダイアグラム</u>*(diagram)*）は

$$\mathrm{Diag}(\mathcal{M}) := \{\varphi \in \mathrm{L}(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \models \varphi \,\&\, \varphi \text{ は閉リテラル}\}$$

のこと。

(c) 他方、L での閉論理式の集まり $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$（<u>$\mathcal{M}$ の公理系</u>*(full theory of $\mathcal{M}$)*）を

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}) := \{\varphi \in \mathrm{L} : \mathcal{M} \models \varphi\}$$

で定める。

2. L-構造 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 間の準同型、同型は通常の数学での同型等とまったく同様に定義される。すなわち

   (a) $\sigma : |\mathcal{M}| \to |\mathcal{N}|$ が準同型写像 *(homomorphism)* であるとは、σ が L のすべての記号の意味を保存すること：どんな n-変数関数記号 $f \in L$ と n-変数関係記号 $R \in L$ （ともに $n \geq 0$）と任意の $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}|$ について

$$\begin{aligned} \sigma(f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)) &= f^{\mathcal{N}}(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)) \\ R^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) &\Rightarrow R^{\mathcal{N}}(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)) \end{aligned}$$

   (b) 準同型写像 $\sigma : |\mathcal{M}| \to |\mathcal{N}|$ が、$\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}$ への <u>埋め込み</u>*(embedding)* であるのは、σ が単射でかつ

$$R^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow R^{\mathcal{N}}(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n))$$

   となるとき。

   (c) 埋め込み σ が双射なら同型写像 *(isomorphism)* といい、$\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ が同型 *(isomorphic)* $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$ であるという。

3. $\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ が <u>初等的同値</u>*(elementarily equivalent)* とは、どんな L-閉論理式 φ についても $\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi$ となること。つまり $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$. このとき、$\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ と書かれる。

   $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$ なら $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ だが、逆は成り立たない。

4. $\mathcal{M} = \langle M; R^{\mathcal{M}}, \ldots, f^{\mathcal{M}}, \ldots, c^{\mathcal{M}}, \ldots \rangle$ が $\mathcal{N} = \langle N; R^{\mathcal{N}}, \ldots, f^{\mathcal{N}}, \ldots, c^{\mathcal{N}}, \ldots \rangle$ の <u>部分モデル</u>*(submodel)* である、あるいは $\mathcal{N}$ が $\mathcal{M}$ の <u>拡大モデル</u>*(extension)* であるとは、$M \subseteq N$ で各記号の $\mathcal{M}$ での解釈が $\mathcal{N}$ でのそれの M への制限になっていること。つまり、$R^{\mathcal{M}} = R^{\mathcal{N}} \cap M^n$ ($R \in \mathrm{L}$ は n-変数関係記号), $f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathcal{N}}(a_1, \ldots, a_n)$ $(a_i \in M)$, $c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{N}}$.

   これを $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ と書き表す。

   $\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}$ への埋め込みが存在するとは、$\mathcal{M}$ が $\mathcal{N}$ のある部分モデルと同型になるということにほかならない。

5. $\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}$ への埋め込み σ が <u>初等埋め込み</u>*(elementary embedding)* であるのは、言語 $\mathrm{L}(\mathcal{M})$ の閉論理式 $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ $(a_i \in |\mathcal{M}|)$ について

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n))$$

   となっていること。

6. $\mathcal{M}$ が $\mathcal{N}$ の <u>初等部分モデル</u>*(elementary submodel)* である、あるいは $\mathcal{N}$ が $\mathcal{M}$ の <u>初等拡大モデル</u>*(elementary extension)* であるとは、$\mathcal{M}$ が

$\mathcal{N}$ の部分モデルであって、しかもどんな $\mathrm{L}(\mathcal{M})$-閉論理式 φ についても $\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi$ となること。このとき、$\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ と書かれる。$\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ との違いに注意。

$\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}$ への初等埋め込みが存在するとは、$\mathcal{M}$ が $\mathcal{N}$ のある初等部分モデルと同型になるということにほかならない。

次は明らかだろう。

命題 4.3 $\mathcal{N}$ を L-構造、$\mathcal{M}$ を $\mathcal{N}$ の部分構造とする。

1. 量化記号なしの $\mathrm{L}(\mathcal{M})$-閉論理式 θ について

$$\mathcal{M} \models \theta \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \theta.$$

2. $\mathrm{L}(\mathcal{M})$ での $\exists$-閉論理式 φ について

$$\mathcal{M} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{N} \models \varphi.$$

また $\forall$-閉論理式 φ なら

$$\mathcal{M} \models \varphi \Leftarrow \mathcal{N} \models \varphi.$$

初等拡大とダイアグラムについて簡単な事実をさきに述べる。

補題 4.4 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ を L-構造とする。

1. $\mathcal{N} \models Diag(\mathcal{M})$ は、$\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}$ への埋め込みの存在と同値である。

とくに $|\mathcal{M}| \subseteq |\mathcal{N}|$ のときは

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \Leftrightarrow \mathcal{N} \models Diag(\mathcal{M}).$$

2. $\mathcal{N} \models Diag_{el}(\mathcal{M})$ は、$\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}$ への初等埋め込みの存在と同値である。

とくに $|\mathcal{M}| \subseteq |\mathcal{N}|$ のときは

$$\mathcal{M} \prec \mathcal{N} \Leftrightarrow \mathcal{N} \models Diag_{el}(\mathcal{M}).$$

3. *(タルスキ＝ボートのテスト, Tarski-Vaught test)* $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ とする。$\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ となるための必要十分条件は、どんな L-論理式 $\varphi[\bar{x}, y]$ と $\bar{a} \in |\mathcal{M}|$ について

$$\mathcal{N} \models \exists y \varphi[\bar{a}, y] \Rightarrow \mathcal{M} \models \exists y \varphi[\bar{a}, y]$$

となることである。

証明. 4.4.1 と 4.4.2. ともに定義より明らか。

4.4.3. 条件を仮定して $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ を示すには、L-論理式 $\psi[\bar{x}]$ と $\bar{a} \in |\mathcal{M}|$ について

$$\mathcal{N} \models \psi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi[\bar{a}]$$

を示さなければならない。これを論理式 ψ の長さに関する帰納法で証明すればよい。$\psi \equiv \exists x\varphi$（と $\forall x\varphi$）の形のときに、仮定によれ。 □

指定された大きさをもつ大きいモデルの存在は、ヘンキン定数を使ったコンパクト性定理の証明から結論できる。

初めに

補題 4.5 言語 L での公理系 T がモデルをもてば、T のモデル $\mathcal{M}$ で $\|\mathcal{M}\| \leq |\mathrm{L}| + \aleph_0$ となるものが存在する。

証明.

$\mathrm{L}(C)$ を L のヘンキン拡張として補題 3.12 より、T のモデルになる $\mathrm{L}(C)$-標準構造 $\mathcal{M}$ が存在する。よって $|\mathcal{M}| \leq |C|$ だが、$|C| \leq |\mathrm{L}(C)| \leq |\mathrm{L}| + \aleph_0$ なので OK. □

定理 4.6 （上方レーベンハイム＝スコーレム *(Upward Löwenheim-Skolem)* 定理）

1. 言語 L での公理系 T がどんなにも大きい有限モデルをもてばあるいは無限モデルをもてば（つまり $\forall n \exists \mathcal{M}[\mathcal{M} \models \mathrm{T} \,\&\, |\mathcal{M}| \geq n]$）、どんな無限基数 $\kappa \geq |\mathrm{L}|$ についても T のモデル $\mathcal{N}$ で濃度 κ のものが存在する。

2. 無限モデル $\mathcal{M}$ についてその初等拡大 $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ で与えられた無限濃度 $|\mathcal{N}| = \kappa \geq \|\mathcal{M}\| + |\mathrm{L}|$ となるものが存在する。

証明. 言語 L_1 での公理系 T_1 を次のように定める。定理 4.6.1 では $\mathrm{L}_1 = \mathrm{L}$, $\mathrm{T}_1 = \mathrm{T}$、定理 4.6.2 に関しては $\mathrm{L}_1 = \mathrm{L}(\mathcal{M})$, $\mathrm{T}_1 = \mathrm{Diag}_{el}(\mathcal{M})$ とおく。

いま言語 L_1 を定数記号を κ 個増やして $\mathrm{L}_2 = \mathrm{L}_1 \cup \{c_\alpha : \alpha < \kappa\}$ とする。L_2-公理系 $\mathrm{T}_2 = \mathrm{T}_1 \cup \{c_\alpha \neq c_\beta : \alpha \neq \beta < \kappa\}$ を考えると、仮定より明らかに有限充足可能。コンパクト性定理と補題 4.5 より、モデル $\mathcal{N}_2 \models \mathrm{T}_2$ で $|\mathcal{N}_2| \leq |\mathrm{L}_2| = \kappa$ を取る。定数を κ 個入れたので $\kappa \leq |\mathcal{N}_2|$ でもあるから、$|\mathcal{N}_2| = \kappa$ である。$\mathcal{N}_2$ の L_1 への reduct $\mathcal{N} = \mathcal{N}_2|\mathrm{L}_1$ を考えればよい。 □

逆に、小さい構造の構成は、生成元による代数系の生成を一般化して得られる。以下の定理 4.9 はコンパクト性定理と関係ないが、上方レーベンハイム＝スコーレム定理 4.6 のついでにここで述べておく。

補題 4.7 L-構造 $\mathcal{M}$ と集合 $X \subseteq |\mathcal{M}|$ について、部分構造 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ で $X \subseteq |\mathcal{N}|$ となる最小のものを取れば、$|\mathcal{N}| \leq |X| + |\mathrm{L}| + \aleph_0$ となる。

証明. 部分集合 $N \subseteq |\mathcal{M}|$ が $\mathcal{M}$ の部分モデルの対象領域になっているということは、N がすべての $f \in \mathrm{L}$ について $f^{\mathcal{M}}$ で閉じている[2]：

$$a_1, \ldots, a_n \in N \Rightarrow f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) \in N$$

ということだから、集合 $\{X_i\}$ を再帰的に

$$\begin{aligned} X_0 &= X \\ X_{i+1} &= X_i \cup \{f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) : f \in L \,\&\, a_1, \ldots, a_n \in X_i\} \end{aligned}$$

として、$N = \bigcup_{i<\omega} X_i$ とおけばよい。 □

ここで $\mathcal{M}$ が公理系 T のモデルだとして、X からつくった構造 $\mathcal{N}$ (X で生成される、あるいは張られる構造) は、T の公理がすべて ∀-論理式で書けていない限り、再び T のモデルになるとは限らない。

そこで公理系 T の言語 L と公理を関数記号とそれに関する公理を付け加えて行って拡張して言語 L^{sk} での公理系 T^{sk} で、$\mathrm{T}^{sk} \models \mathrm{T}$ かつ T^{sk} の公理はすべて ∀-論理式となるものをつくる。T^{sk} を T の<u>スコーレム化</u> (Skolemization) という。

言語 L_i を再帰的につくっていく。

1. 初めに $\mathrm{L}_0 = \mathrm{L}$.

2. L_i は既につくられたとする。

   量化記号のない L_i-論理式 $\varphi[x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m]$ $(n \geq 0, m > 0)$ について<u>スコーレム関数</u> (Skolem function) と呼ばれる n-変数関数記号 $f_{\varphi,k}$ $(1 \leq k \leq m)$ をつくる。

   そして L_{i+1} を、量化記号のない L_i-論理式 φ ごとにつくったスコーレム関数 f_φ 全部を L_i に付け加えた言語とする。

3. 言語 $\mathrm{L}^{sk} = \bigcup_i \mathrm{L}_i$ とおく。この言語での論理式 θ について、論理式 θ^{sk} を次のようにつくる。初めに θ を冠頭標準形 ψ に書き換えて、そこから量化記号をスコーレム関数をつかって内側から ∃ がなくなるまで順々に消して行って ∀-論理式 θ^{sk} ができあがる: $\bar{z} = z_1, \ldots, z_k$ (パラメタ) , $\bar{x} = x_1, \ldots, x_n$ として

   (a) $\forall \bar{x} \exists y_1 \cdots \exists y_m \varphi[\bar{z}; \bar{x}; y_1, \ldots, y_m]$ $(k, n \geq 0, m > 0)$ を
   $\forall \bar{x} \varphi[\bar{z}; \bar{x}; f_{\varphi,1}(\bar{z}, \bar{x}), \ldots, f_{\varphi,m}(\bar{z}, \bar{x})]$ に書き換え

   (b) $\exists \bar{x} \forall y_1 \cdots \forall y_m \varphi[\bar{z}; \bar{x}; y_1, \ldots, y_m]$ $(k \geq 0, n, m > 0)$ を
   $\exists \bar{x} \varphi[\bar{z}; \bar{x}; f_{\neg\varphi,1}(\bar{z}, \bar{x}), \ldots, f_{\neg\varphi,m}(\bar{z}, \bar{x})]$ に書き換える。

[2]ここで、$n = 0$ つまり定数記号 c については、$c \in N$ を意味する。

ここで $f_{\neg\varphi,k}$ は論理式 $\neg\varphi[\bar{z};\bar{x};y_1,\ldots,y_m]$ に対するスコーレム関数。

θ の冠頭標準形 ψ は唯一つに定まらないが、それをどうつくってもできあがる θ^{sk} たちは互いに論理的に同値なので以下の議論にはそれでよい。

4. 言語 L^{sk} での公理系 T^{sk} を、各スコーレム関数 f_φ ごとに次の公理

$$\forall x_1\cdots\forall x_n\forall y_1\cdots\forall y_m\{\varphi[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m]\to \varphi[x_1,\ldots,x_n,f_{\varphi,1}(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_{\varphi,m}(x_1,\ldots,x_n)]\} \quad (42)$$

をつくり、これらを

$$\{\theta^{sk}:\theta\in\mathrm{T}\}$$

に付け加えた公理系とする。

まず公理系 T^{sk} は $\forall$-閉論理式のみより成ること、および

$$|\mathrm{L}^{sk}|=|\mathrm{L}|+\aleph_0$$

に注意せよ。

また、$\mathcal{M}\models\mathrm{T}$ は $\mathcal{M}^{sk}\models\mathrm{T}^{sk}$ に拡張できる。つまりスコーレム公理 (42) を満たすようにスコーレム関数の解釈を決めてやればよい。

はじめに簡単な事実をおさえておく。

補題 4.8 どんな L^{sk}-論理式 θ についても

$$\mathrm{T}^{sk}\models\theta\leftrightarrow\theta^{sk}\leftrightarrow\neg(\neg\theta)^{sk}$$

である。よって T^{sk} ($\mathrm{T}=\emptyset$ でも) のもとで、論理式は $\forall$-論理式とも $\exists$-論理式とも同値である。

定理 4.9 (下方レーベンハイム=スコーレム *(Downward Löwenheim-Skolem)* の定理)

L-無限モデル $\mathcal{M}$ と集合 $X\subseteq|\mathcal{M}|$ について、初等部分モデル $H(X)\prec\mathcal{M}$ で $|H(X)|\leq|\mathrm{L}|+|X|+\aleph_0$ となるものがつくれる。

証明.

はじめに L-構造 $\mathcal{M}$ を L^{sk}-構造 $\mathcal{M}^{sk}$ にスコーレム公理 (42) が満たされるように拡張する。その上で、補題 4.7 の証明でつくった L^{sk}-構造 $\mathcal{N}$ の L-構造への縮小を $H(X)$ とすればよい。

$H(X)\prec\mathcal{M}$ は $\mathcal{N}\prec\mathcal{M}^{sk}$ より分かる。他方、$\mathcal{N}\prec\mathcal{M}^{sk}$ には $|\mathcal{N}|$ の元の名前付き論理式 φ は $\varphi\equiv\theta[\bar{z}:=\bar{c}]$ ($\bar{c}$ は $|\mathcal{N}|$ の元の名前) として、L^{sk}-論

理式 θ に補題 4.8 を用い、命題 4.3.2 により

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \models \varphi &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \theta^{sk}[\bar{z} := \bar{c}] \\
&\Rightarrow \mathcal{N} \models \theta^{sk}[\bar{z} := \bar{c}] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi \\
&\Leftrightarrow \mathcal{N} \models \neg(\neg\theta)^{sk}[\bar{z} := \bar{c}] \\
&\Rightarrow \mathcal{M} \models \neg(\neg\theta)^{sk}[\bar{z} := \bar{c}] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi
\end{aligned}$$

□

4.0.2 演習

1. $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$ なら $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ を示せ。

2. 公理系 T のスコーレム化 T^{sk} は T の保存拡大である。

3. 補題 4.8 を証明せよ。

4. アーベル群 $G = \langle G; +, 0\rangle$ が <u>順序付けられる (orderable)</u> とは、G 上の全順序 $<$ で

$$\forall x, y, z[x < y \to x + z < y + z]$$

となるものが存在すること。順序 $<$ により G が順序付けられるとき、この順序を込みにした構造 $G = \langle G; +, 0, <\rangle$ を <u>順序群 (ordered group)</u> とよぶ。アーベル群 G について次は容易に分かる：

(a) G に順序が付けられれば、ねじれのない群である。

(b) G が有限生成のねじれのない群ならば、順序付けられる。

後者より、G がねじれのない群ならば、順序付けられる、ことをコンパクト性定理より証明せよ。

5. アーベル群 G が <u>ねじれ群 (torsion group)</u> であるとは

$$\forall x \exists n \geq 1[nx = 0] \tag{43}$$

であるとき。これも上と同じ理由で 1 階論理の閉論理式ではない。敢えて書き表わそうとすると

$$\forall x[x = 0 \vee 2x = 0 \vee \cdots \vee nx = 0 \vee \cdots]$$

となってしまう。話しにケリをつけるために次を証明しよう。

命題 4.10 すべてのねじれアーベル群で正しい閉論理式全体からなる集合は、あるねじれ群でないアーベル群でも正しい。

事実、示されることは次のことである：アーベル群 G がどんなに高い位数の元も持てば（例えば $\oplus_{p:\mathrm{prime}} Z_p$）、あるアーベル群 H で、H はねじれ群でないにも関わらず、$G \equiv H$ となる。従って、ねじれアーベル群は有限であれ無限であれ、いかなる 1 階論理の閉論理式の集合でも特徴付けられない。よって、ねじれアーベル群は（1 階論理で）公理化可能でない。

6. 命題 1.4 を証明せよ。

7. $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ だが同型にならない例 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ を与えよ。

8. L-公理系 T が <u>全称公理化可能</u> とは、言語 L での $\forall$-閉論理式の集合

$$\mathrm{T}_\forall := \{\varphi : \mathrm{T} \models \varphi,\ \varphi \text{ は } \forall\text{-閉論理式}\} \tag{44}$$

について、$\mathrm{T}_\forall \models \mathrm{T}$ すなわち $\mathrm{T}_\forall$ の任意のモデルが T のモデルであることとする。

このとき T が全称公理化可能であるための必要十分条件は、$\mathcal{M}$ が T のモデルについて $\mathcal{M}$ の部分モデル $\mathcal{N}$ が T のモデルになることである。このとき公理系 T は部分モデルで <u>保存される</u>(preserved) という。

（解答）一般に $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M} \models \mathrm{T}$ なら $\mathcal{N} \models \mathrm{T}_\forall$ であるから、T が全称公理化可能ならば T は部分モデルで保存される。

逆に T が部分モデルで保存されているとする。$\mathcal{N} \models \mathrm{T}_\forall$ と仮定して $\mathcal{N} \models \mathrm{T}$ を示したい。そのために先ず $\mathrm{T} \cup Diag(\mathcal{N})$ が充足可能であることをコンパクト性定理により示し、補題 4.4.1 により拡大モデル $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M} \models \mathrm{T}$ を考えよ。

$\mathrm{T} \cup Diag(\mathcal{N})$ が充足可能であることをみるために $Diag(\mathcal{N})$ の有限部分 $\{\theta_i[\bar{c}]\}$ を取る。ここに θ_i は量化記号のない L-論理式で $\bar{c}$ は $|\mathcal{N}|$ の元の名前である。よって $\mathcal{N} \models \exists \bar{x} \bigwedge_i \theta_i[\bar{x}]$ となり、仮定 $\mathcal{N} \models \mathrm{T}_\forall$ より $\mathrm{T} \not\models \neg \exists \bar{x} \bigwedge_i \theta_i[\bar{x}]$

つまり L-モデル $\mathcal{M} \models \mathrm{T} \cup \{\exists \bar{x} \bigwedge_i \theta_i[\bar{x}]\}$ の存在がいえ、このモデルでの量化記号 $\exists \bar{x}$ の証拠で名前 $\bar{c}$ を解釈すれば（定数 $\bar{c}$ は言語 L に含まれず、従って T に現れていないので勝手に解釈しても T の真偽に影響しないことに注意）$\mathrm{T} \cup \{\theta_i[\bar{c}]\}$ のモデルの存在がいえる。

9. L-公理系 T と L-構造 $\mathcal{A}$ について

$$\mathcal{A} \models \mathrm{T}_\forall \Leftrightarrow \exists \mathcal{M}[\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M} \models \mathrm{T}]$$

を示せ。

（続く）