数学通論 レポート 7 2007 年 7 月 6 日

提出 7/13

- 確認テストの予定: 7/20 (Fri), 講義時間中. 持ち込み不可. 3 問（原則 1 時間, 延長可)
- 結果の通知予定: 7/23 (Mon 朝), 合格者の番号を B 棟 4 階の数学科の掲示板に掲示.
- 追試: 7/27 (金曜日), 8:00–8:30, 理学部 B 棟 314 号室. 採点はその場で.

問 7.1 1. 同値関係の定義を書きなさい. 同値関係による完全代表系の定義を書きなさい.

2. 集合 G と，二項演算 $G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$ が与えられているとき $(G, \cdot)$ が群であることの定義を書け.

3. $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ は行列の積により群となることを示せ.

4. $e(x) = x, f(x) = 1 - x, g(x) = 1/x, h(x) = \frac{x-1}{x}, k(x) = \frac{1}{1-x}, \ell(x) = \frac{x}{x-1}$ と置くとき, これら 6 つの関数の集合は関数の合成により群となることを示せ.

解答

問 7.2 p を素数とする.

1. 集合 $\mathbf{Z} \setminus p\mathbf{Z} = \{x \in \mathbf{Z} \,|\, x \notin p\mathbf{Z}\}$ に関係 $x \sim y$ を $x \equiv y \bmod p$ で定義する. $\sim$ は同値関係であることを示せ.

2. $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ は $G = (\mathbf{Z} \setminus p\mathbf{Z})/\sim$ の完全代表系であることを示せ.

3. $x \in \mathbf{Z} \setminus p\mathbf{Z}$ のとき
$$[x] = \{z \in \mathbf{Z} \setminus p\mathbf{Z} \,|\, z \sim x\}$$
と定義した. $[x]$ は G の元であるとみなせる. (参考: $[x]$ の集合としての G は考えにくいので普通は完全代表系の集合と G を同一視する.)
さて G の元 $[x]$, $[y]$ の積を $\mathbf{Z}$ のかけ算を用いて $[xy]$ で定義する. $\mathbf{Z}$ のかけ算が G の積を矛盾なく定義すること (well-defined) を示せ.

4. $p = 5$ の時に G の群表を作製せよ.

5. G は上の積で群であることを示せ.

6. 要素の数が n である可換な群 G を考える. このとき $x \in G$ に対して $x^n = e$(単位元) であることを証明せよ.

解答