

KSEG で遊ぶ

濱田 龍義

1 序

ここでは、対話式幾何学ソフトウェア“KSEG”の紹介を行ないます。このソフトウェアは、Ilya Baran 氏の作品です。対話式幾何学ソフトウェアとは、コンパスや定規の代わりにコンピュータと対話をしながら図形を描きます。単にコンパスと定規の代わりならば、わざわざコンピュータを使う意味はありません。KSEG を使うと、図形の性質を保ったまま、変形、回転、移動を行なえます。2 点の距離や角度を計測したり、計算を行なうこともできます。また、点の軌跡を描く機能があるので、様々な平面曲線を描いて遊ぶこともできます。

2 起動方法

KSEG を起動しましょう。画面左下にある \sqrt{x} メニューの中から KSEG(KSEG) を選んで、マウスでクリックしてください。下の図のようなウィンドウが表示されます。

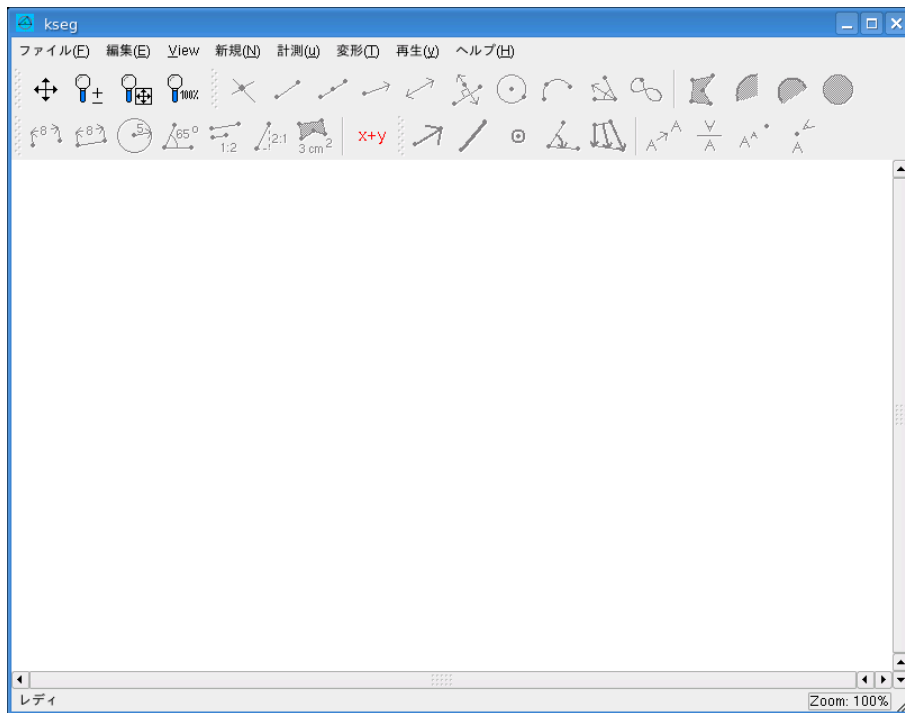


図 1 KSEG 画面

ウィンドウ上部にメニューが配置され、その下にはボタン型のアイコンがあります。ボタンの絵を見れば、おおよその見当はつくのではないのでしょうか？ヘルプをクリックすると日本語に翻訳された解説を読むことができます。詳しい使い方を知りたい時は、このヘルプファイルを読むと良いでしょう。

2.1 KSEG で平面幾何を遊ぶ

基本的な使い方については、次の3つのことだけ押えておけば十分です。

1. 右クリックで点を描画
2. 左クリックで点や線、円を選択 (矩形選択や shift キーを用いた複数選択も可能)
3. 図形作成に必要な点や線を選択後、メニューもしくはボタンで図形を作成

例えば、線分を描きたいとします。平面内で線分を決定するためには両端の2点が必要です。従って、KSEG で線分を描く時は、次のような手順を踏みます。

図2 適当な場所で右クリック

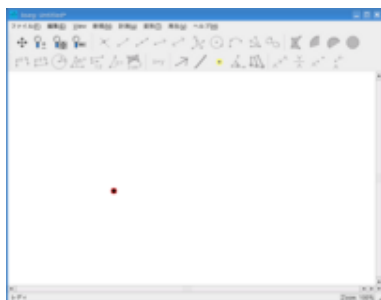


図3 さらに別な場所で右クリック

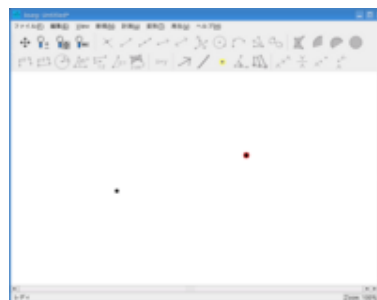


図4 Shift キーを押しながら2点を選択

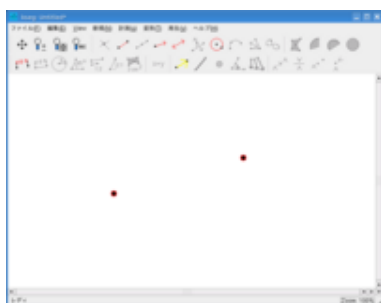
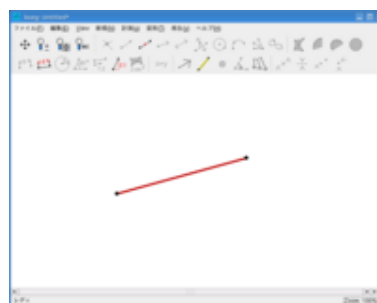


図5 メニューから「新規」→「線分」



同様に「線分」の代わりに「直線」や「半直線」を選択することもできます。もちろん、ボタンで指定しても構いません。

また、KSEG で円を描くためには、次のような手順を踏みます。

最初に選択した点を中心にして、もう一つの点を通る円が描かれます。

おそらく、ボタンに描いてある絵をみれば、どのような作図ができるか、予想できるのではないのでしょうか？

2.2 三角形を描く

三角形を描くときは、マウスによる矩形選択を利用すると便利です。

図6 適当な場所で右クリック

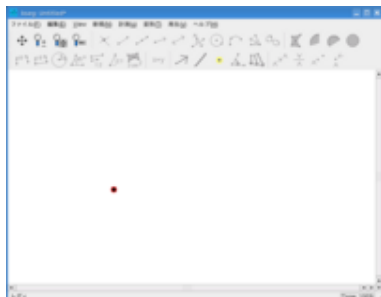


図7 さらに別な場所で右クリック

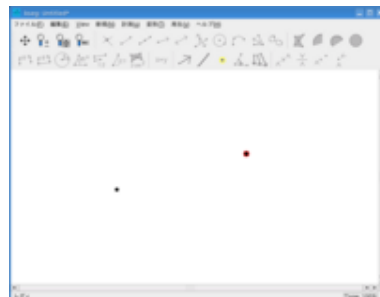


図8 Shift キーを押しながら2点を選択

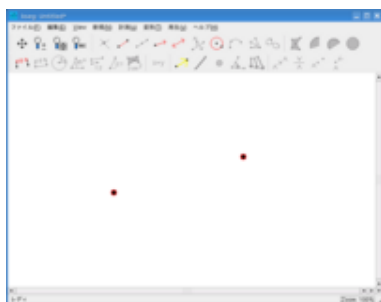


図9 メニューから「新規」→「円」

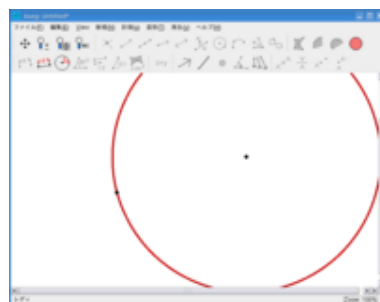


図10 三角形を描くように3点を描く

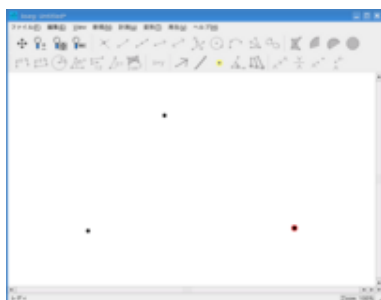


図11 3点を囲むようにマウスをドラッグ

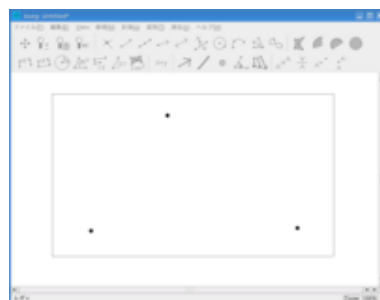
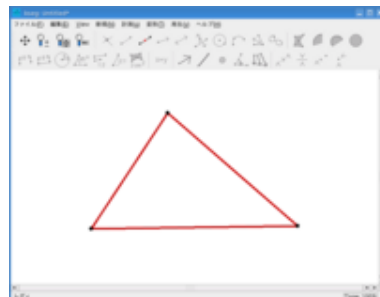
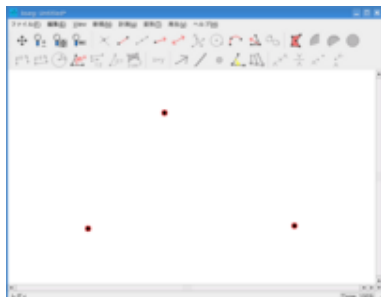


図12 3点が選択されました。

図13 メニューから「新規」→「線分」



2.2.1 三角形の五心

三角形は内心、外心、垂心、重心、傍心を持ちます。これらをあわせて五心とも呼びます。

内心 三角形の3つの内角の二等分線は1点で交わる。この点を内心と呼ぶ。

外心 三角形の3辺の垂直二等分線は1点で交わる。この点を外心と呼ぶ。

垂心 三角形の3つの頂点からそれぞれの対辺に引いた垂線は1点で交わる。この点を垂心と呼ぶ。

重心 三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ3つの線分は1点で交わる。この点を重心と呼ぶ。

傍心 三角形の1つの内角と他の2つの外角の二等分線は1点で交わる。この点を傍心と呼ぶ。三角形に傍心は3つある。

KSEGでは線分の長さを計ったり、計算を行なうこともできます。線分の比を計算することで、五心の性質を確認することもできます。ここでは、重心の描き方を解説します。残りの内心、外心、垂心、傍心については、自分で描き方を考えてみてください。

重心は、三角形の頂点と対辺の中点を結ぶ線分を2:1に内分することが知られています。このことを確認するためにKSEGの「計測」という機能を用います。

図 14 三角形を描く

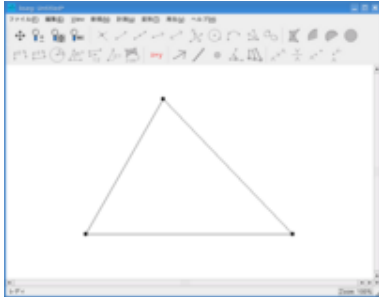


図 15 三角形の辺の一つをマウスでクリック

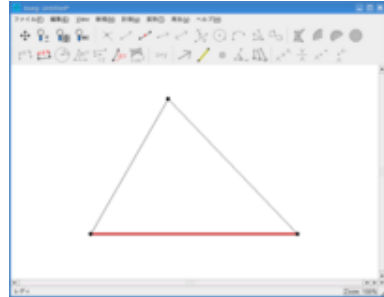


図 16 メニューから「新規」 → 「中点」

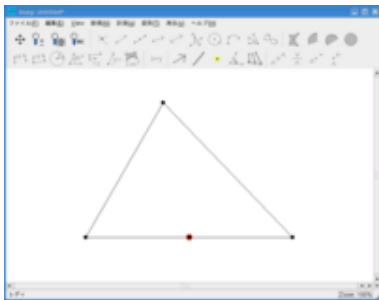


図 17 三角形の頂点の一つと、その対辺の中点を Shift キーを押しながらマウスでクリック

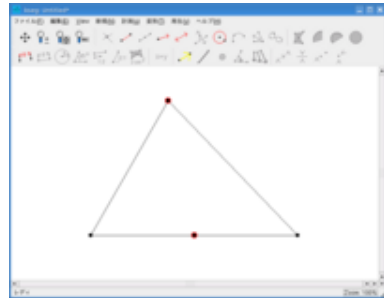


図 18 メニューから「新規」 → 「線分」

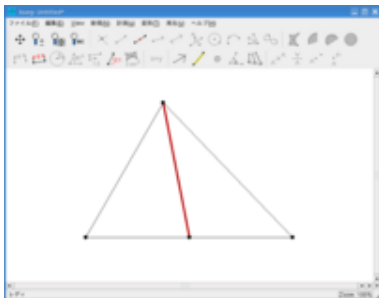


図 19 他の 2 個の三角形の頂点に対しても同様の操作

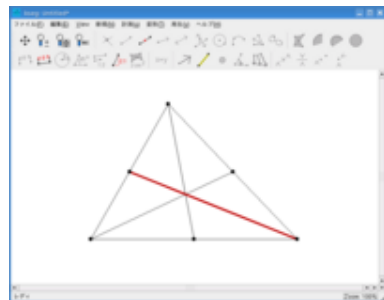


図 20 三角形の中に書かれた線分を 2 本選択

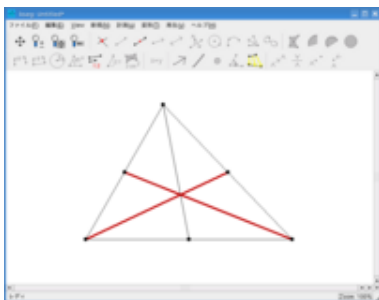


図 21 メニューから「新規」 → 「交点」

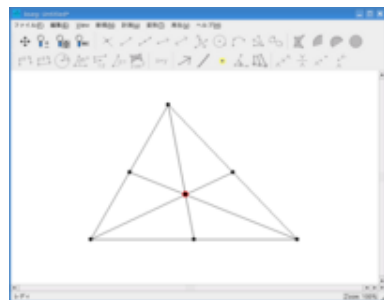


図 22 三角形の頂点と重心を選択

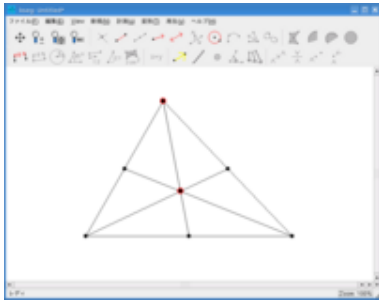


図 24 重心と対辺の中点との距離を計測

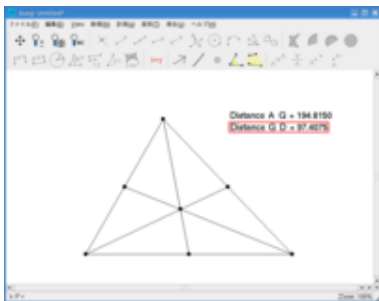


図 26 メニューから「計測」→「計算」

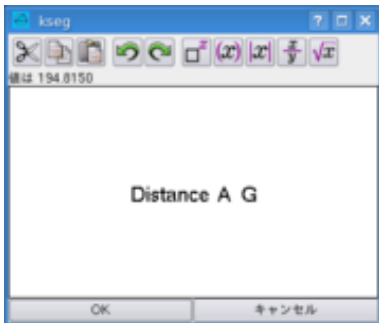


図 28 先ほどの計測値の小さい方を選択

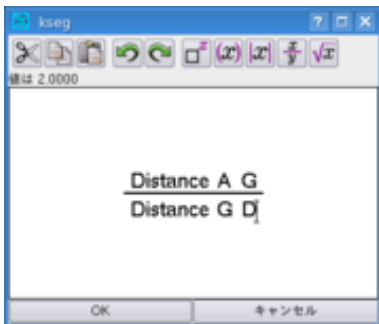


図 23 メニューから「計測」→「距離」



図 25 計測値の大きい方を選択

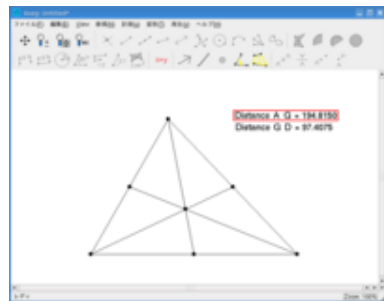


図 27 カーソルを行末に置いて、 $\frac{y}{x}$ ボタンを押す

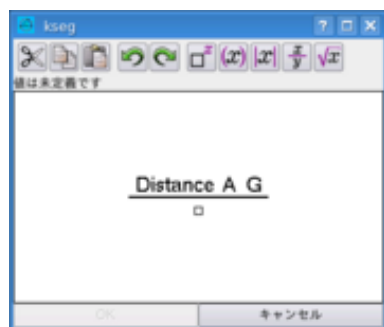
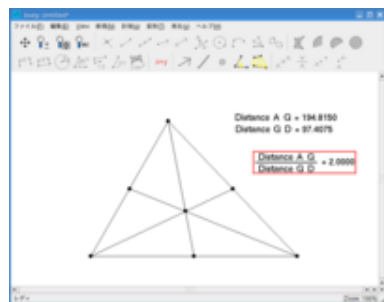


図 29 計算ウィンドウの「OK」をクリック



2.3 KSEG で曲線を遊ぶ

KSEG は点の軌跡を描くことができます。放物線 (例: $y = x^2$) や、正弦曲線 (例: $y = \sin x$) を描きます。まず、頻繁に使いますので、最初に座標系、 x 軸と y 軸の描き方を述べておきます。

2.3.1 水平線と垂直線を描く

図 30 2 点を水平な位置に描き、直線を描く

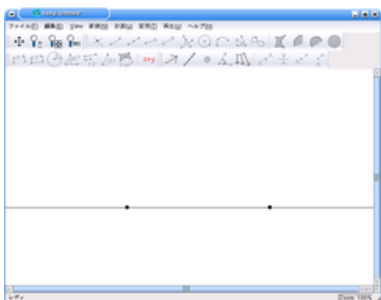


図 31 2 点だけ選択後、「編集」→「オブジェクトを隠す」

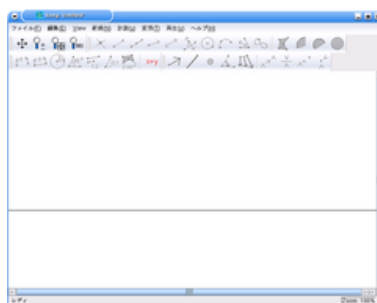


図 32 水平な直線上の好きな場所に点を描く

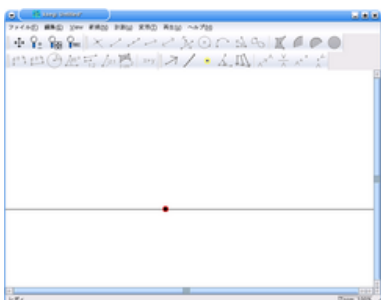
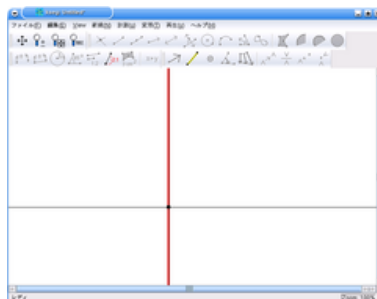


図 33 点と直線を選択し、「新規」→「垂線」



水平な直線が x 軸、垂直な直線が y 軸となります。 x 軸をマウスでドラッグすると水平なまま移動できます。 y 軸も同様に垂直なまま移動できます。

2.3.2 xy 座標を描く

2.4 放物線を描く

水平線を x 軸、垂直線を y 軸に見立てて、交点を原点とします。放物線は図形的には“定直線 l と、 l 上にない定点 F から等しい距離にある点の軌跡”として定義されます。ここでは、原点を通る放物線を描きます。

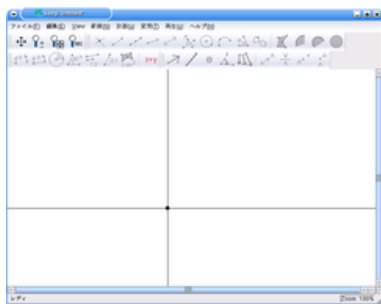


図 34 水平線と垂直線を描く

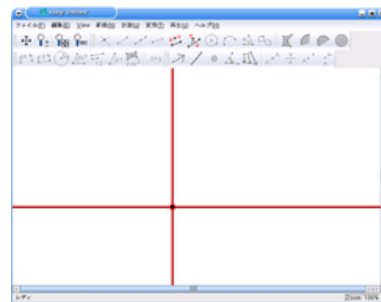


図 35 マウスをドラッグして、全てを選択状態に

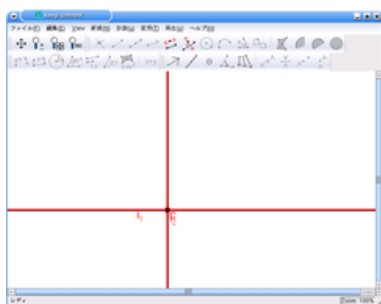


図 36 メニューから「編集」→「ラベルを表示」

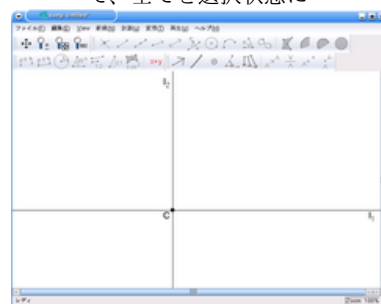


図 37 何も描かれていない場所をクリックして、選択を解除

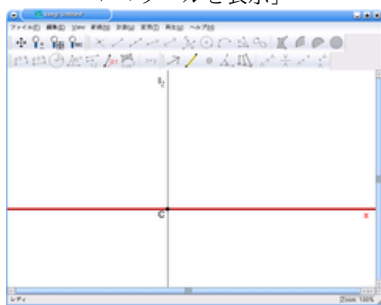


図 38 水平線を選択し、メニューから「編集」→「ラベルを変更」

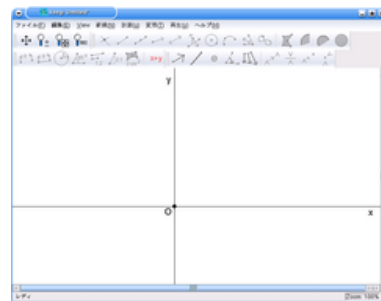


図 39 垂直線、交点のラベルを変更

図 40 xy 座標を描く

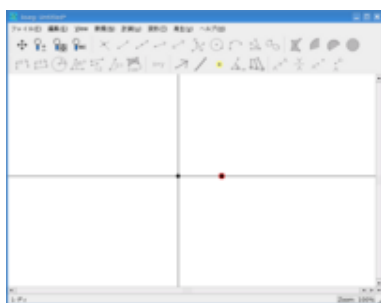


図 41 y 軸上に点を描く。これが焦点

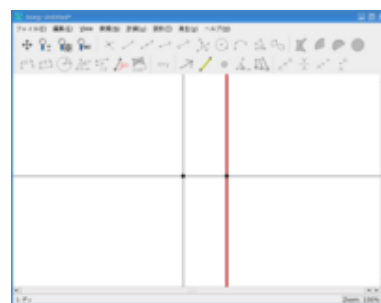


図 42 2 点を上から順番に選
 択して「変形」 → 「ベクトル
 を選択」

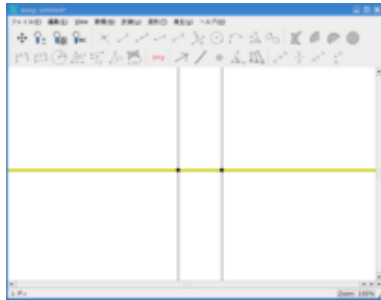


図 43 原点だけを選択して、
 「変形」 → 「変換」

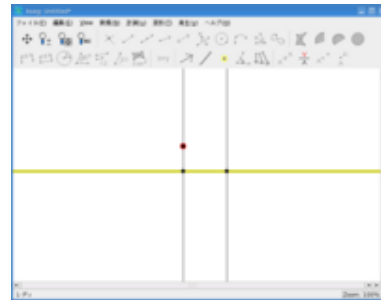


図 44 y 軸と y 軸上の負の部
 分にある点を選択して、「新規」
 → 「垂線」

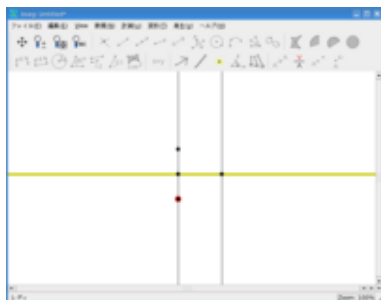


図 45 x 軸に平行な直線上に駆
 動点を作成

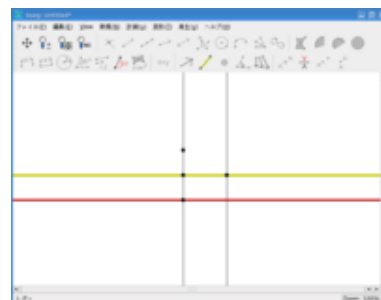


図 46 x 軸に平行な直線と駆
 動点を選択して、「新規」 →
 「垂線」

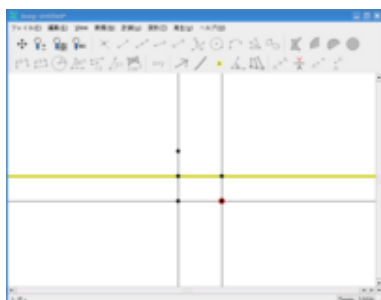


図 47 焦点と駆動点を選択し
 て、「新規」 → 「線分」

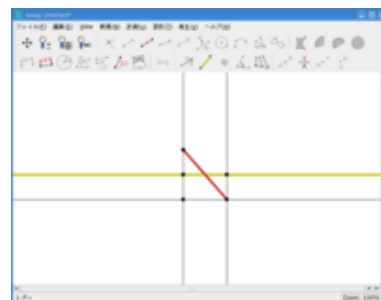


図 48 線分を選択して、「新規」 → 「中点」

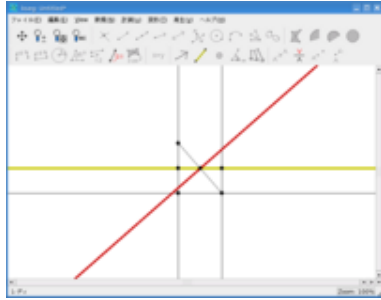


図 49 線分と中点を選択して、「新規」 → 「垂線」

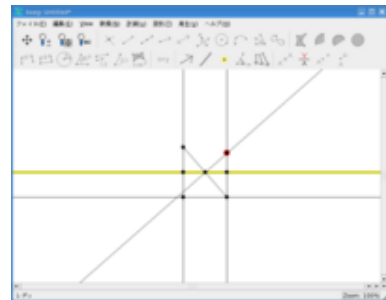


図 50 2直線の交点を選択

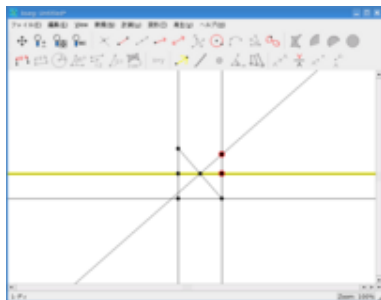
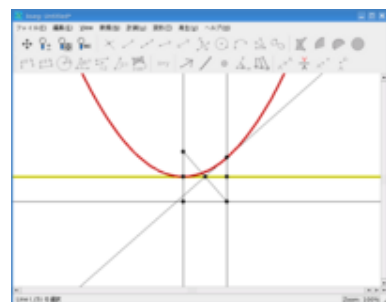


図 51 Shift キーを押しながら駆動点も選択して、「新規」 → 「軌跡」



2.5 正弦曲線を描く

放物線を描く方法の中で、「変形」という機能を用いました。「変換」の他にも、「鏡映」、「倍率」、「回転」などの操作が可能です。ここでは、「回転」という機能を用いて、正弦曲線を描きます。^{*1}

図 52 xy 座標を描く

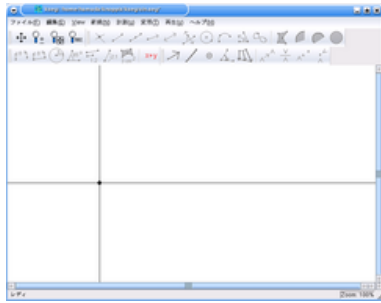


図 53 x 軸上に点を描く

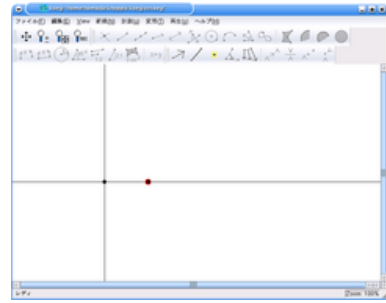


図 54 原点を中心として x 軸上の点を通る円を描く

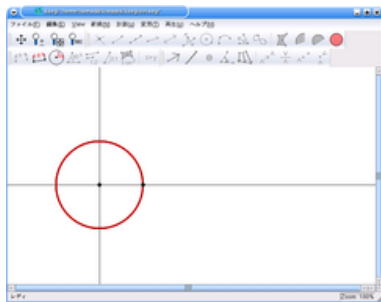


図 55 x 軸上にもう一つ点を描く。これを駆動点とする。

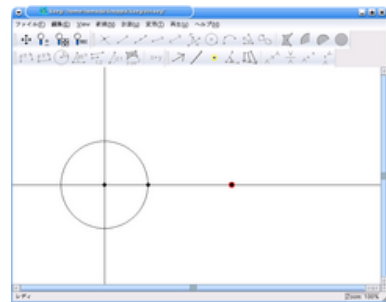


図 56 新たに作成した点と x 軸を選択して「新規」→「垂線」

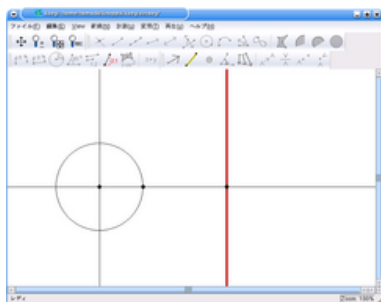
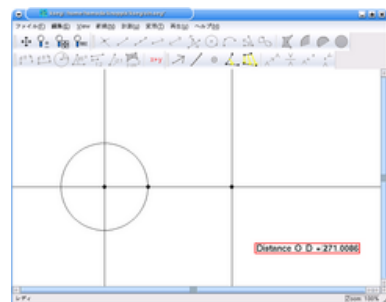


図 57 原点と x 軸上の駆動点を選択して「計測」→「距離」



^{*1} ここで紹介した方法では、 y 軸に関して対称なグラフ $y = \sin|x|$ が描かれます。駆動点の動く範囲を $x > 0$ に限定すれば、皆さんの見慣れたグラフが得られます。

図 58 計測された距離を選択して、「変形」→「角度を選択」

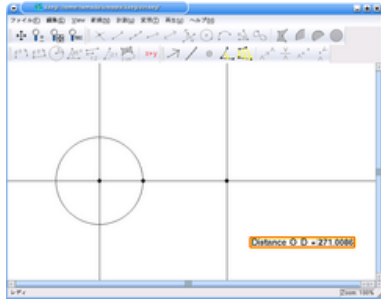


図 59 原点を選択して、「変形」→「中心を選択」

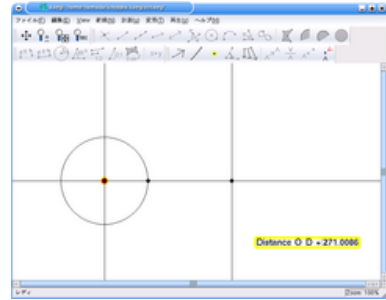


図 60 x 軸と円との交点を選択して、「変形」→「回転」

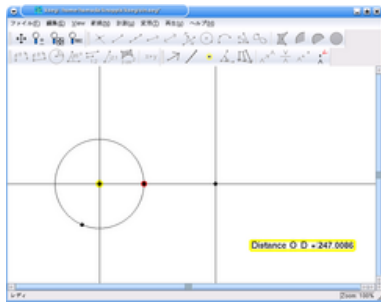


図 61 円上の動点と y 軸を選択して、「新規」→「垂線」

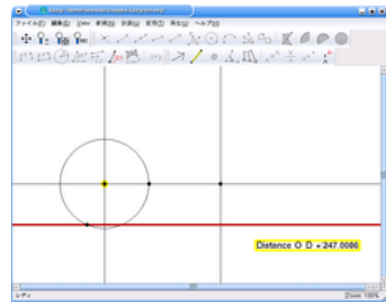


図 62 2 垂線を選択して、「新規」→「交点」

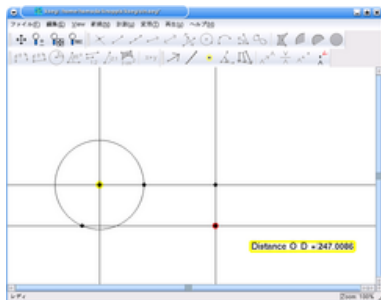
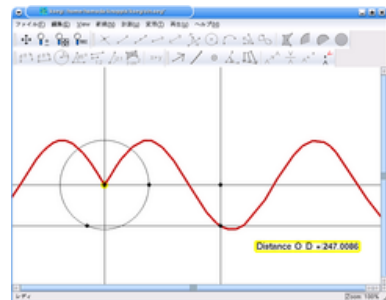


図 63 駆動点と交点を選択して、「新規」→「軌跡」



2.6 アポロニウスの円

2つの定点からの距離の比が $m:n$ である点の軌跡は円になります。この円のことを“アポロニウスの円 (Apollonius Circle)”と呼びます。

図 64 直交する2直線を描く

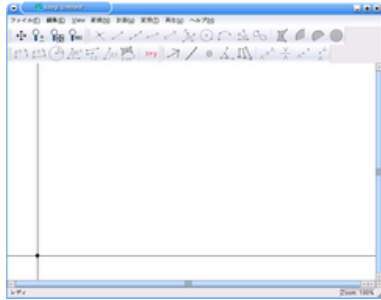


図 65 縦軸上に2点を描く

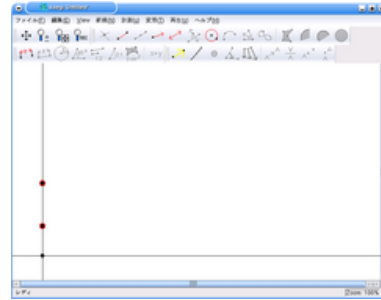


図 66 描いた点のうち、下の
方から垂線を伸ばす

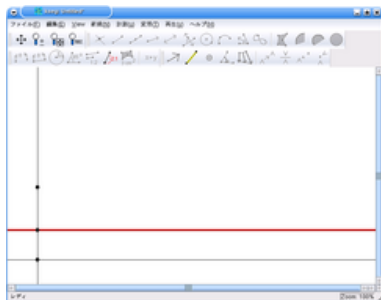


図 67 上側の横軸上に2点を描く

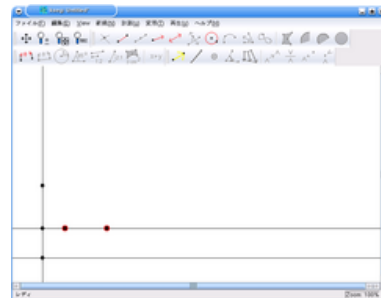


図 68 縦軸上の点と上横軸の
点を選択し、半直線を描く

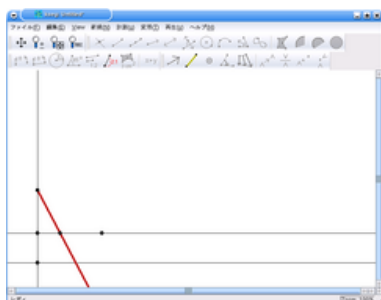


図 69 同様に、もう一本、半直線を描く

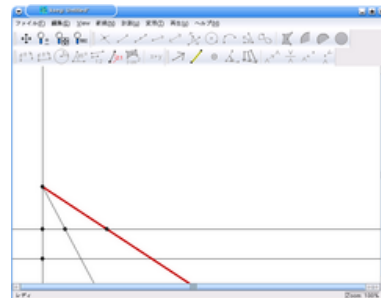


図 70 半直線と下側の横軸との交点を取る

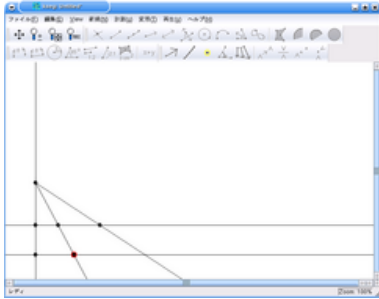


図 71 同様に、もう一本の半直線についても交点を取る

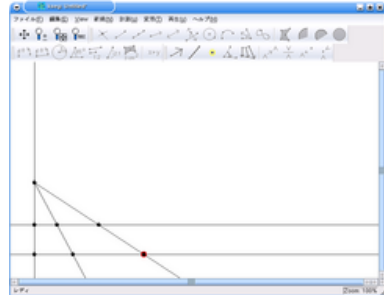


図 72 適当な位置に線分を取る

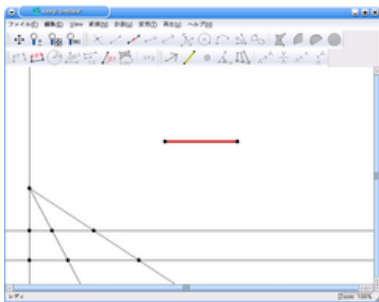


図 73 下の横軸上に半径のための線分を取る

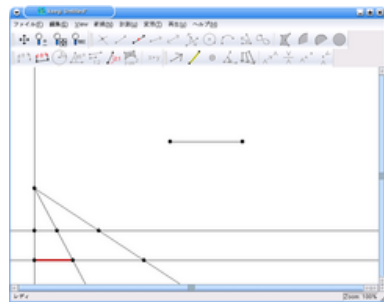


図 74 Shift キーを押しながら中心となる点も選択

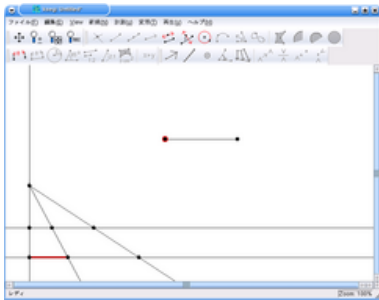


図 75 円を描く

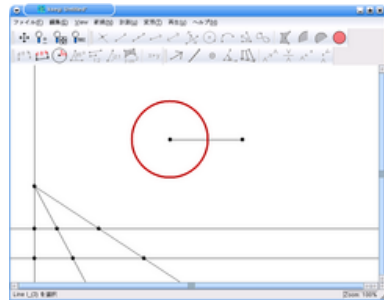


図 76 同様に半径として線分を選択

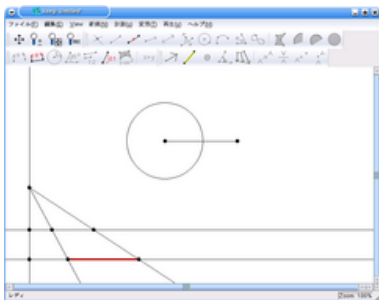


図 77 同様に Shift キーを押しながら中心となる点も選択

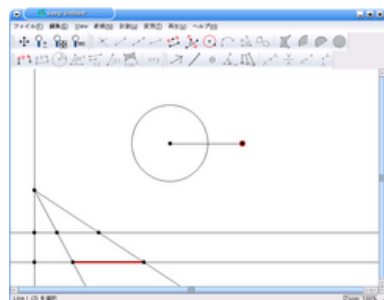


図 78 円を描く

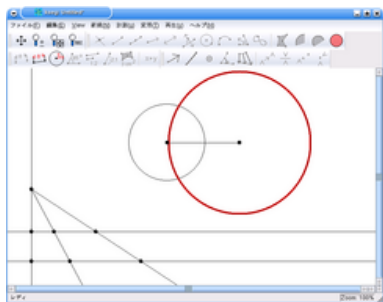


図 79 2円の交点を取る

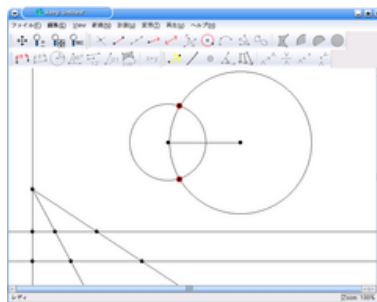


図 80 縦軸上の駆動点と円の交点の一方を選択して軌跡を描く

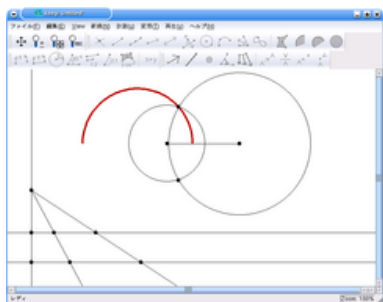
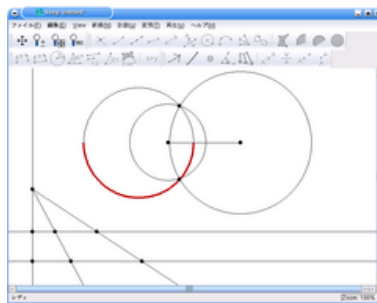


図 81 もう一方の交点についても同様



2.7 サイクロイド

円が直線上をすべらずに転がる時、円上の1点が描く曲線のことを“サイクロイド (cycloid)”と呼びます。ここでは、KSEG を用いてサイクロイドを描きます。例えば、円が左から右側に転がるとすると、円はすべらずに転がっているため、円が移動した距離 OQ と円弧 QD の長さが等しくなるように、KSEG の「変形」→「回転」を用いれば良いことが予想されます。

図 82 サイクロイド

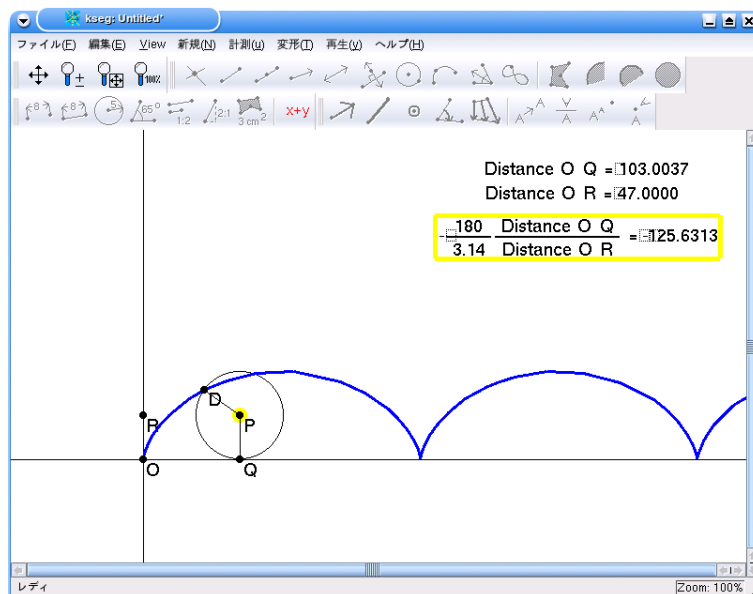


図 83 直交する2直線を描く

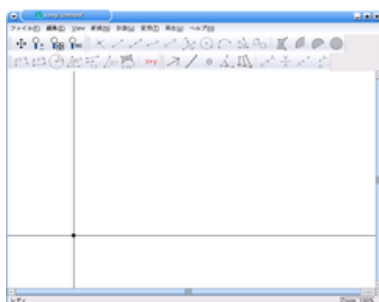


図 84 y 軸上に点を描く

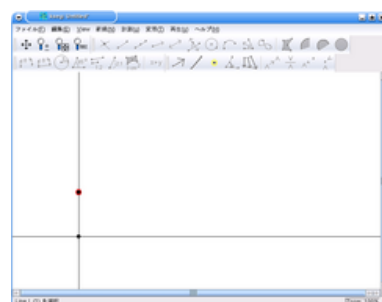


図 85 描いた点から y 軸に垂直に垂線を伸ばす

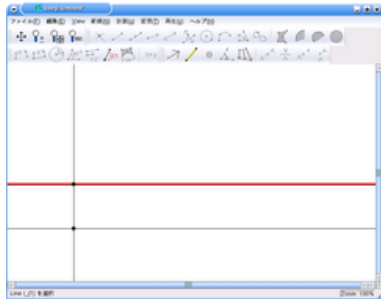


図 86 直線上に点を描く

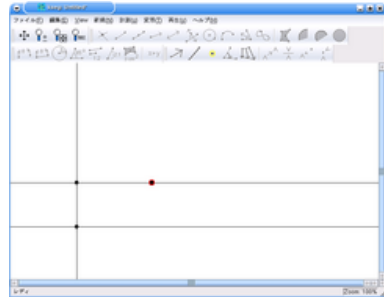


図 87 x 軸に平行な直線をメニューから「編集」→「オブジェクトを隠す」

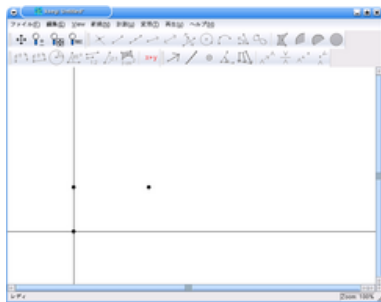


図 88 y 軸から始まる半直線を描く

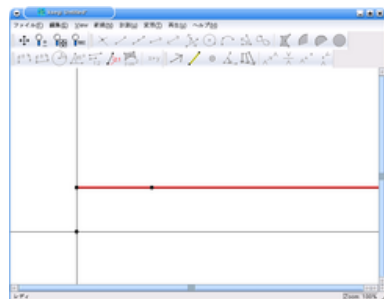


図 89 半直線上を動く点を描く

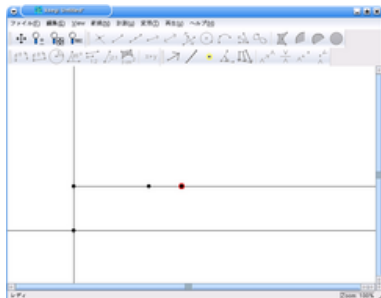


図 90 半直線と半直線を描くために用いた 1 点を選択

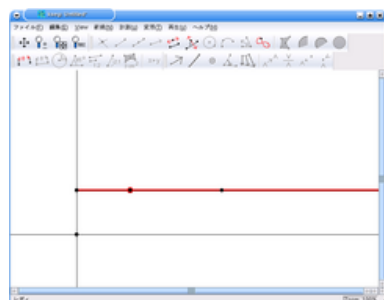


図 91 メニューから「編集」→「オブジェクトを隠す」

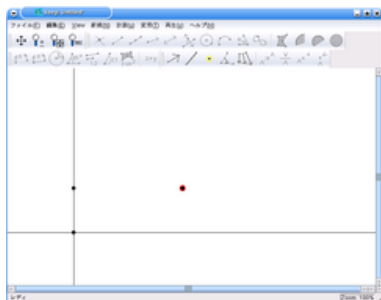


図 92 孤立している点から x 軸に垂線を引く

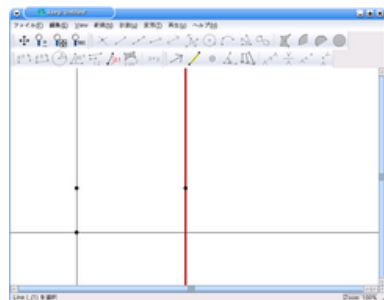


図 93 x 軸との交点を描く

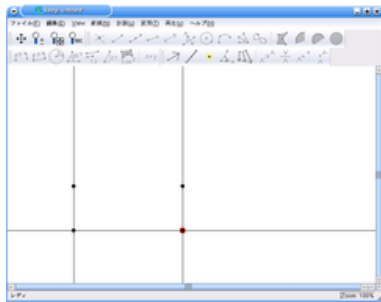


図 94 x 軸に垂直な直線を隠す

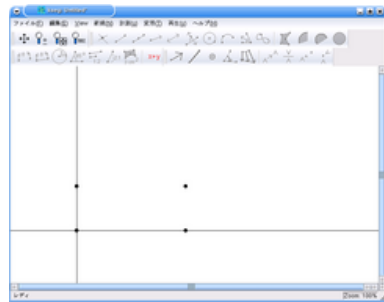


図 95 x 軸に接する円を描く

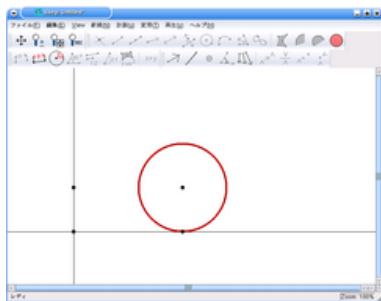


図 96 4 点を選択

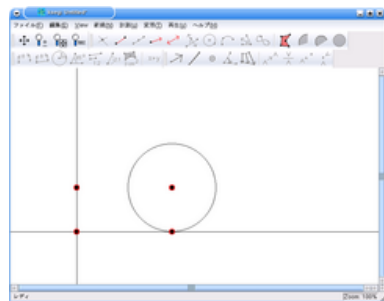


図 97 メニューから「編集」→「ラベルを表示」を選択

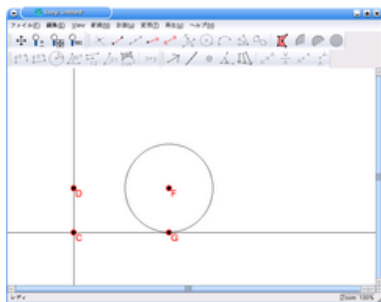


図 98 メニューから「編集」→「ラベルを変更」を選択

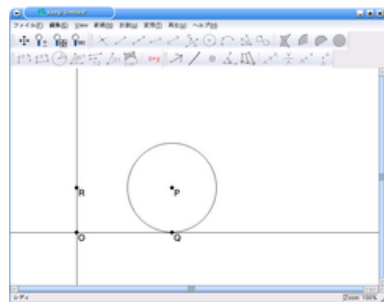


図 99 2点 O , Q を選択して、メニューから「計測」→「距離」

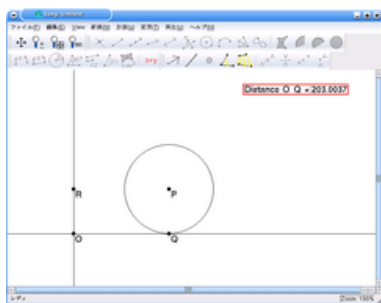


図 100 2点 O , R を選択して、メニューから「計測」→「距離」

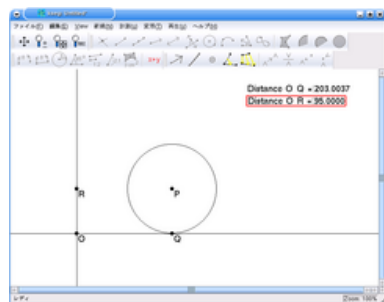


図 101 Distance OQ を選択して、メニューから「計測」→「計算」



図 102 Distance OQ の後尾をクリックして、 $\frac{y}{x}$ ボタンをクリックして、先ほど計測した Distance OR をクリック

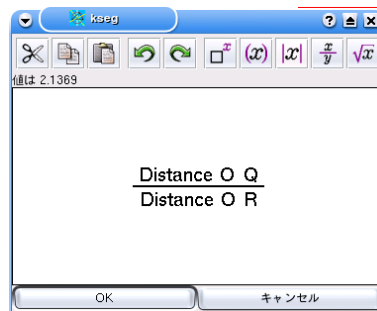


図 103 弧度法と、回転方向を変換するために $-\frac{180}{3.14}$ を掛ける

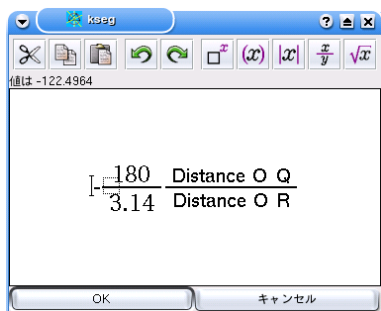


図 104 OK をクリックして計算結果を表示

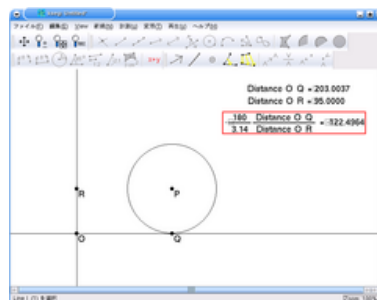


図 105 メニューから「変形」→「角度を選択」

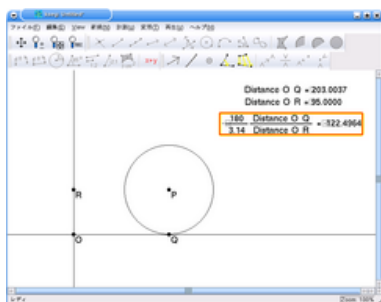


図 106 点 P をクリックして、メニューから「変形」→「中心を選択」

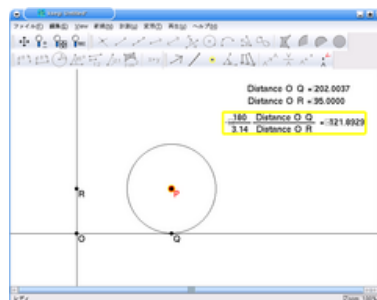


図 107 点 Q を選択して、メニューから「変形」→「回転」

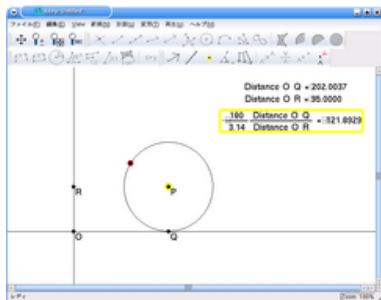


図 108 回転によってできた点を選択して、メニューから「編集」→「ラベルを表示」

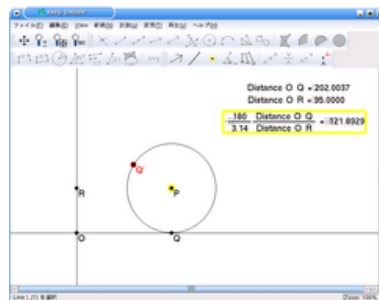


図 109 メニューから「編集」→「ラベルを変更」

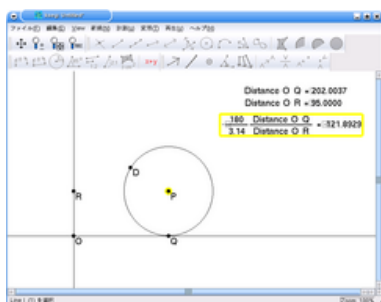


図 110 点 P, D を選択

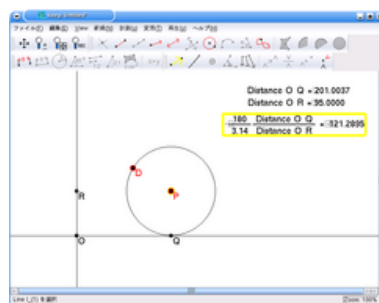


図 111 メニューから「新規」→「軌跡」

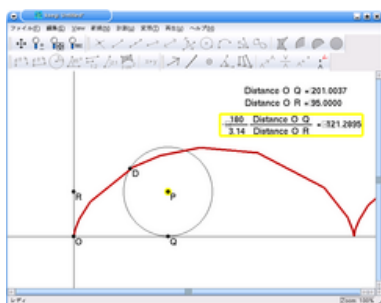
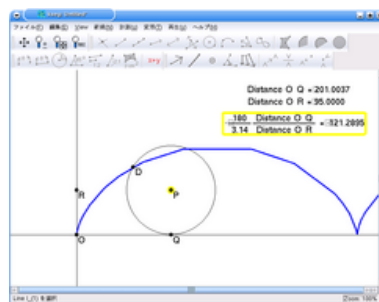


図 112 メニューから「編集」→「サンプルの数を変更」を選択して、サンプル数を増やす。



ここまで、紹介してきた機能は KSEG の持つ機能の一部ですが、十分に楽しめるのではないかと思います。いくつか課題を出しておきましょう。解答は一つとは限りません。

1. KSEG を用いて放物線を描く別の方法は？
2. KSEG を用いて楕円を描く方法は？
3. KSEG を用いて双曲線を描く方法は？
4. KSEG を用いて余弦曲線 $y = \cos x$ を描く方法は？
5. KSEG を用いて正接曲線 $y = \tan x$ を描く方法は？

参考文献

- [1] シンデレラ 幾何学のためのグラフィックス J. リヒター-ゲバート, U.H. コルテンカンブ著, 阿原 一志訳, ISBN4-431-70966-5
- [2] シンデレラで学ぶ平面幾何, 阿原 一志著, ISBN4-431-71120-1
- [3] Wikipedia, <http://ja.wikipedia.org/wiki/>