上智大学コミュニティカレッジ
2007 年度秋期講座

「実験から始まる数学 2」 ～コンピュータと数学ソフトウェアで遊ぶ～

角皆 宏・梅垣 敦紀・青井 久

第 6 回: ぐるぐる定規で遊ぶ

1 対話的幾何学ソフトウェア KSEG でもう一度遊ぼう

KNOPPIX/Math に収められている「対話的幾何学ソフトウェア」**KSEG** は、本講座の第 3 回「視覚を遊ぶ」でも用いましたが、今日の講座でもこのソフトウェアを使って遊んでいくことにしましょう。第 3 回の時に行なった使い方の練習として、定規とコンパスとによる作図のシミュレートの範囲内でしたが、**KSEG** は他にも「軌跡」「計測」の機能を用いて、定規とコンパスとだけでは描くことのできない図形も、画面上に描いて更にそれを動かして観察することが出来ます。今日はこの「軌跡」「計測」の機能の練習から始めましょう。

始めに「軌跡」の機能で遊びましょう。

実習 1.1. 直線とその上にない 1 点を取って、その両者から等距離にある点の軌跡を描いてみましょう。

1. まず 2 点を取って、それを通る直線を引きましょう。
2. 直線上に 1 点を取りましょう (直線上で右クリック)。この点は直線上だけしか動けません (「この点が直線上にある」という関係を保ちながら動く)。
3. 今取った点から直線の垂線を立てましょう。点を動かすとこの垂線も (始めの直線に垂直という関係を保ちながら) 動きます。
4. 始めに取っておいた点と今取った点とを線分で結んで、その垂直二等分線を描きましょう (線分の中点を取り、その点を通って線分に垂直な直線を引く)。
5. さっき作った直線の垂線と今の垂直二等分線との交点を取ります。この点は、一番始めに取った直線と点とから等距離にあります。
6. 直線上にとった動点を動かすと、今取った交点も動きます。この点の軌跡を描いてみましょう。

この軌跡はどういう図形でしょうか。また、始めの点を直線に近付けたり、逆に離したりすると、どんな風に変わるでしょうか。

2　ぐるぐる定規 (スピログラム) を作ってみる

次に「計測」の機能を使って、「ぐるぐる定規 (スピログラム)」の仕掛けを作りましょう。「ぐるぐる定規」は、外枠の円の内側を小さい円が滑らずに転がる時に、小さい円内の 1 点が描く軌跡として図形を描く道具です。外枠の円と内側の円との半径の比率や、内側の円内での 1 点の位置 (中心からの距離) を変えることで、様々な (しばしば綺麗な) 図を描くことが出来ます。

考察 2.1. 外枠の円の中心の周りを内側の円が回る角度 (公転角) と、外枠の円との接点に対して内側の円自身が回る角度 (自転角) との間の関係は、どうなっているでしょうか。

実習 2.2. 「ぐるぐる定規 (スピログラム)」で図形を描いてみましょう。

1. 2 点を結んで線分を引いておきます。なるべく画面の端から端まで長い方が良いでしょう。
2. この線分上に点を取り、片方の端からこの点までの距離を「計測」します。線分上で点を動かすと、距離の数値が目まぐるしく変わりますね。ここまでは道具立ての準備です。
3. 別に 2 点を取り、片方を中心として、もう一方の点を通る円を描きましょう。この円が「ぐるぐる定規」の外枠の円になります。
4. 今描いた円の中心を回転移動の中心に、先程取った距離の値を回転移動の角度に、それぞれ指定します。角度は度数法 (1 周 360°) で扱われます。これが “公転角” になります。
5. 上の指定に従って円周上にある点を回転移動した点を作りましょう。円の中心を回転移動の中心にしましたから、今作った点も外枠の円周上にあるはずです。
6. 線分上に取って置いた点 (制御点) を動かすと計測した距離が変わり、従って回転角も変わって、今作った点も動きます。
7. 今作った円周上の動点と円の中心とを結び (線分にするより中心を始点とする半直線を作った方が面白い)、この線 (動径) 上に新たに点を取り、この点を中心にして円周上の動点を通る円を描きましょう (自動的に外枠の円に接する)。これが内側を転がる円になります。
8. 外枠の円の半径と内側の円の半径とをそれぞれ「計測」しておきます。
9. ウインドウ上部のメニュー内の “Measure” から “Calculate” を選び、先の考察に従って “自転角” を計算しましょう。
10. 内側の円の中心を回転移動の中心に、今作った “自転角” を回転移動の角度に、それぞれ指定します。

11. この指定に従って、外枠の円と内側の円との接点を回転移動した点を作りましょう。
12. 制御点の動きに連れてこの点がどう動くか、追ってみましょう。また、軌跡を描いてみましょう。
13. 内側の円の中心と今の点と結び (線分にするより中心を始点とする半直線を作った方が面白い)、この線 (動径) 上に新たに点を取りましょう。
14. 制御点の動きに連れてこの点がどう動くか、追ってみましょう。また、軌跡を描いてみましょう。

注 2.3. KSEG では、制御点を小刻みに動かしながら、それにつれて動く点を沢山求めて繋ぐことで、軌跡を描いています。軌跡がガタガタとしている場合は、この刻みが大きい ("sampling points" が少ない) ので、その数を増やすとより滑らかな図が描けます。軌跡が選択されている状態で、ウインドウ上部のメニュー内の "Edit" から "Change Numbers of Samples" を選び、点の数の値を増やしましょう。(初期値が 150 ですが、多分 1500 くらいで充分です。計算量に影響するので、増やし過ぎると動作が遅くなります。)

考察 2.4. 軌跡を表示したままで、内側の円の中心 (外枠の円の動径上にある) を動かして半径を変えてみると、軌跡はどのように変わるでしょうか。また、内側の円の動径上に最後に取った点を動かしてみると、軌跡はどのように変わるでしょうか。

3　ぐるぐる定規の軌跡をもっと観察する

「ぐるぐる定規」で描いた図形をもっと観察しましょう。軌跡を決める (変える) 要素は 2 つで、外枠の円の半径と内側の円の半径との比 (外枠の円を固定してあれば単に内側の円の半径) と、内側の円内での動点の位置 (内側の円の中心からの距離) とです。(本質的には先程作ったものと同じ仕組みですが) もっと観察し易いような作りにしたものを用意しました。

実習 3.1. `spirogram.seg` を開いてみましょう。左上の制御点と各動径上の点とを連動させてあるので、左上の直線上で点を動かすと軌跡が変わります。

考察 3.2. 内側の円の半径を変えていくと、時々“明らかに顕著な現象” が起こると思われます。どんな現象が観察できるでしょうか。また、それはどんな時に発生するでしょうか。

外枠の円の半径 Length s_3	内側の円の半径 Length s_4	その比 $\dfrac{\text{Length } s_4}{\text{Length } s_3}$
180 (固定)		

4　観察から予想・定式化・証明へ

更に観察を続けましょう。今度は内側の円の半径を一旦固定し、内側の円の動径上の点を動かして軌跡の変化を見ます。

実習 4.1. 内側の円の半径を固定して動径上の点を動かしてゆくと、内側の円の中心に近い時には円に近い膨らんだ形の軌跡になり、内側の円の円周に近い時には反り返った形の軌跡になります。その間に丁度「辺がほぼ直線状」に見えるときがあるでしょう。この時の内側の円の半径 Length s_4 と動径上の点の中心からの距離 Length s_5 とを表に書き込みましょう。内側の円の半径を違う値にして色々の場合のデータを集めてみましょう。

考察 4.2. それは内側の円の半径と動径上の点の中心からの距離とがどのような関係にあるときでしょうか。何か法則の予想が立ちますか。

外枠の円の半径 Length s_3	内側の円の半径 Length s_4	中心からの距離 Length s_5	
180 (固定)			

色々観察して「**予想**」が立ったでしょうか。増加・減少くらいの定性的性質なら、観察で予想が立つかも知れません。定量的に、内側の円の半径 Length s_4 と動径上の点の中心からの距離 Length s_5 との関係式が予想できて、Length s_4 から Length s_5 が予め算出できるとなれば、数学的にかなりの前進です。別の Length s_4 の値に対して、予想される Length s_5 の値を求めてから、実際にその時にほぼ直線状の形になっているか確かめてみましょう。そうなっていたらこの予想はますます確からしいと言えます。そうでなければ予想を修正する必要があるでしょう。

或る程度確からしそうな予想が立ったら、それを証明しようとします。証明が出来たら、それが「**定理**」となる訳です。基本的には、証明がついて初めて数学的な業績と言えます。この辺りは、厳密な意味での証明が事実上不可能な (自然科学・社会科学の) 他の分野との、最も顕著な違いと言えるでしょう。(勿論、数多くの現象の観察と深い洞察力とにより、その後の研究を導いていくような新たな予想を立てることも、高く評価されますが。)

しかし証明を試みるためにどうしても必要なことが、現段階では実はまだ出来ていません。それは、

「『ほぼ直線状』とはどういうことか」ということが、まだ明確に定められていない

ということです。つまり、証明すべき問題が確定していないのです。それでは証明のしようがありませんね。

従って、我々がまずすべきことは「『ほぼ直線状』とはどういうことか」をきちんと定義することです。それによって初めて、考えるべき問題が確定し、誰もが同じ問題を認識し、それに関する考察や証明が正しいか否か、誰から見ても判定することが可能になるのです。この段階を「**定式化**」と呼びます。

学校で習う数学は既に定式化された内容を扱うのが通常なので、一般にはこの段階は余り意識されていないかと思いますが、この「定式化」という段階は数学では非常に重要な営みです。“正しい” 定式化が出来たら証明はもはや明らか、ということも少なくありません。また、“良い” 定式化が行なえると、より広い適用範囲に更に一般化して考えることができ、新たな現象の発見に繋がっていきます。特に現代数学では、

あるべき「定式化」を得ること

が最も重要と言っても良いかも知れません。

しかし、より広い範囲に適用できる一般的な定式化を行なうためには、どうしても抽象的な記述を積み重ねることになります。その辺が数学の解り難さの一因になっていることも、残念ながら確かでしょう。「数学として証明のし易い定式化」と「人間が直観的に把握し易い表現」というのは中々一致しないようです。数学を専門として学ぶ学生は、その間の行き来を日頃から訓練している訳です。

今回の問題に対して、どのような法則が成り立つか、どのように定式化するべきか、実はこちらでも敢えてまだ考えていません。現象の観察から予想を定式化し証明を試みる、という正に「実験から数学が始まっていく姿」を味わえれば幸いです。