

4 ゲームで遊ぶ

4.1 ゲームとは

「game」という英単語にはいろいろな意味があります。日本では、「遊戯，娯楽」という意味で使われることが多いと思います。ですが，ここではより広い範囲の「勝負，試合」そこから発展して「策略，計画」ということを意味しています。「ゲーム」を考察する，というのは以下のようにまとめられます。

ある決められたルールの中で，各プレイヤーが，各々の目的 (与えられた目的を達成する，最大限の収益を上げる，損失を最小限にする等) をもって行動する状況において，それぞれの最適な行動を調べたり，その動向を予測する。

これは「ゲーム理論」として，数学の一分野として扱われています。ゲーム理論が扱う分野は広く，経済学や生物学，心理学とも密接な関係を持っています。

当たり前の話ではありますが，現実の多くの事象は環境設定が複雑であり，「最適な行動」を求めることはとてもできません。そこで，設定を簡略化した状態で考えることが必要になります。単純化された状態においては，数学の理論として組み立て，コンピュータに計算をさせたりすることが可能となり，様々な実用的な結果が得られています。その典型例が，オセロ，チェス，将棋，囲碁などのボードゲームです。これらは，まだ完全には解明されていませんが，コンピュータの性能が飛躍的に進歩したこともあって，オセロやチェス等は，素人では到底勝てないようなプログラムが作成されています。

今回はより簡略化させたゲームをコンピュータで扱うことによって，その理論の一端を知って頂ければと思います。

4.2 2人ゲームの考察

一般のゲームの定式化について長々と書くよりも，典型的な例を出して，それを考察することにします。今回考えるのは，以下のような状況です。

- プレイヤーは A と B の 2 名。
- A, B それぞれが取ることができる戦略 (行動) は 2 つまたは 3 つである。それぞれ 1 つずつ選択する。
- 2 人の行動によってお互いの利益が数値として決定する。これを，利得と呼ぶことにする。

このゲームでは多くても，9 つの結末しかありません。それを以下のように表すことにします。これを，利得行列と呼びます。

A\B	B1	B2	B3
A1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})	(a_{13}, b_{13})
A2	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})	(a_{23}, b_{23})
A3	(a_{31}, b_{31})	(a_{32}, b_{32})	(a_{33}, b_{33})

ここで、 (a_{11}, b_{11}) は2つの数字の組で、A が A1 を、B が B1 の行動をとった場合の A の利益、B の利益をそれぞれ表しています。ですから、それぞれは、この9個の数字からなるべく大きなものが得るのが目標となります。非常に単純なものではありますが、この中には多くの理論が潜んでいます。以下、具体的な例で考えてみましょう。

値下げ合戦

最初の例は、競合する A 社と B 社が製品の値下げをするかどうか？ という状況です。片方だけが値下げをした場合、利益は大きくなりますが、双方とも値下げをしてしまった場合には、その効果は少なくなります。これは、以下のように表すことができます。

A\B	現状維持	値下げ
現状維持	(4, 4)	(2, 8)
値下げ	(8, 2)	(6, 6)

この場合、各社の戦略はどのようにすれば良いでしょうか？

A 社にしてみれば、B が値下げをする、しないに関係なく、値下げをした方が利益は出るようになります。ですから、この場合には、A 社は値下げをした方が良いという結論を得られます。これは、B 社の立場でも同様です。ですから、「値下げをする」という選択はこのゲームにおいて支配的な選択になっています。もちろん、直観的にも分かるのですが、gambit において確かめることもできます。「2companies.gbt」を開いて、メニューの「Tools」から「Dominance」にチェックを入れることで、無駄な戦略が排除されます。

このように、最適な選択肢が1つに決まる場合はそれを選べば良いだけの話です。

問題になるのは、1つの選択肢を選ぶだけでは済まない場合です。

じゃんけん

今度は、「toss.gbt」を開いて下さい。これは、おなじみのじゃんけんです。「勝つ」ことが目的なわけですから、まずは利得行列を以下のように考えましょう。

A\B	グー	チョキ	パー
グー	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)
チョキ	(0, 1)	(0, 0)	(1, 0)
パー	(1, 0)	(0, 1)	(0, 0)

この場合、双方とも戦略を1つに絞ることができません。相手の出し方によって変わるからです。メニューの「Tools」から「Dominance」にチェックを入れても、どの項目も消去されないことを確認して下さい。

では、何でも良いかということ、そういうわけにもいきません。例えば、「最初はグー」という戦略を取った場合、それを相手に見抜かれてしまったら、相手はパーを出すことでしょう。

それでは、どのように考えれば良いのでしょうか？ 別の視点から考えてみることにしましょう。

4.3 混合戦略

じゃんけんではどうして答が出なかったかということ、1つの戦略に固執してしまったからです。そこで、次のように考えを変えてみましょう。

各戦略毎に、採用する確率を決めておき、行動は、その確率によって決定する。

こう考えると、選択肢が3つしかない場合でも、戦略は無限にあります。この場合、利得はどのように計算すれば良いのでしょうか？

簡単のために、お互いに選択肢を2つにして考えてみることにしましょう。

野球の対決

ピッチャー A とバッター B と 2 人のプレイヤーが勝負をします。A の利得を「抑える確率」B の利得を「出塁する確率」として、考えてみましょう。このゲームのように、自分の利得と相手の利得の和が一定であるゲームは「零和ゲーム」と呼ばれています。零和ゲームでは、「自分の利得をいかに上げるか？」を追求することは「相手の利得をいかに下げるか？」を追求することと同じになります。

今は話を単純にして、A は「直球」または「カーブ」のどちらかを投げることにして、B はそのどちらかを予測して打つことを考えます。予測が正しければヒットになる確率は高くなる、ということで、利得行列を以下のようにします。

A\B	直球を予想	カーブを予想
直球を投球	(70, 30)	(90, 10)
カーブを投球	(80, 20)	(50, 50)

ここでは、双方とも最適な戦略を1つに絞ることはできないことに注意して下さい。そこで、Aが直球を p の確率で投げることにします。(カーブは $1-p$ の確率で投げることになります。)同様に、Bは直球を q の確率で予想することにします。それぞれの行動に関する確率は次のようになります。

A\B	直球を予想	カーブを予想
直球を投球	pq	$p(1-q)$
カーブを投球	$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

すると、Aの利得は、各確率に利得をかけたものの和である“期待値”によって表すことができます。具体的には、以下の通りです。

$$70pq + 90p(1-q) + 80(1-p)q + 50(1-p)(1-q)$$

これは、ゲームを何度も繰り返した場合にAが得る利得の平均とすることもできます。

実験 1. XMaxima を使って、 p, q を変えた場合のそれぞれの期待値を計算して下さい。Aの立場から見て最適な p の値、Bの立場から見て最適な q の値を考えて下さい。

Aが $p = \frac{3}{5}$ とした場合、Bがどのような戦略を取ったとしても、Aの利得(の期待値)

は26よりも小さくなることはできません。同じように、 $q = \frac{4}{5}$ とすれば、 p をいくら変えてもAの利得が74よりも大きくなることはありません。ゆえに、それぞれがこの戦略を取った場合、お互いに戦略を変える意味はなくなります。つまり、「平衡状態」になるわけです。このような点は「ナッシュ均衡」と呼ばれます。どのような設定にしても(プレイヤーと戦略が有限の場合)必ずナッシュ均衡が存在することが数学的に証明されています*1。ですから、このようなゲームを考える際には、ナッシュ均衡を求めることが重要になります。

4.4 ナッシュ均衡

このように、混合戦略を考えることによって、うまい答を見つけることができますが、これを手で計算するのは大変です。そこで、gambit を使って計算することにしましょう。

*1 証明には、「角谷の不動点定理」という数学の定理を使います。

「Tools」の「Equilibrium」から求めることができます。「baseball.gbt」を開いて確かめて下さい。

実験 2. じゃんけんの場合に、ナッシュ均衡を求めて下さい。更に、ナッシュ均衡が、利得行列によって変化することも確かめてみましょう。例えば、以下のような状況を考えてみて下さい。

- お互いに同じ場所から、階段に登るのが目的である。
- じゃんけんを繰り返して、勝った方が階段に登ることができる。登る段数は、勝った時の手によって変化する。
- グーで勝った場合には「3段」、チョキで勝った場合には「6段」、パーで勝った場合には「6段」登ることができる。
- 引き分けの場合には、じゃんけんのやり直し。

この場合、最適な戦略はどのようなのでしょうか？他にも、利得行列をいろいろ変えることで、ナッシュ均衡を計算して下さい。たとえば、グーで勝った場合に「100段」登ることができる場合にはどのようなのでしょうか？

ナッシュ均衡によってわかるものは、相手がどんな戦略を取っても自分が常に得ることができる(と期待できる)一定の利得です。ゆえに、ナッシュ均衡が計算できたからといってゲームに「勝てる」わけではありません。ですが、ゲームを解析する上ではとても重要な意味を持っています。

4.5 囚人のジレンマ

最後に、ナッシュ均衡が求められたからといってもそれが最適なものとは限らないことを紹介したいと思います。この典型例は、囚人のジレンマと呼ばれるものです。以下のような状況です。

A\B	黙秘	自白
黙秘	(-2, -2)	(-15, -1)
自白	(-1, -15)	(-10, -10)

実験 3. 「prisoner.gbt」を開いて、ナッシュ均衡を調べて下さい。

ここにおけるナッシュ均衡はお互いに「黙秘」が0%、「自白」が100%となります。見て分かるように、それは賢い選択ではありません。例えば、最初の例で双方が値下げをすると利益が下がる場合も同じ状態に陥ります。

A\B	現状維持	値下げ
現状維持	(4, 4)	(2, 8)
値下げ	(8, 2)	(3, 3)

現実世界では、このような場合は「談合」を行って双方の利益を保持する行動に出ることでしょう。

このように、単純なゲームでも様々な事態が考えられ、研究が行なわれています。現実にかかる様々な事象をうまく定式化して解析を行うことは、ゲーム理論の大きな目的の1つであると言えるでしょう。