

「実験から始まる数学 2」 ~ コンピュータと数学ソフトウェアで遊ぶ ~

角皆 宏・梅垣 敦紀・青井 久

第 3 回: 視覚を遊ぶ

1 対話的幾何学ソフトウェア KSEG で遊ぼう

KNOPPIX/Math には、KSEG という「対話的幾何学ソフトウェア」が入っています。これは図形を描いたり動かしたりと実に楽しめるソフトウェアなので、今日の講義の前半は KSEG の紹介や使い方の練習に充てましょう。詳しい説明は参考資料をどうぞ。

実習 1.1. 3 点を取って、それぞれを線分で結んで三角形を作りましょう。次に 3 辺の中点を取りましょう。

1. 3 頂点と対辺の中点とをそれぞれ結んでみましょう。
2. 3 辺の中点を通り辺に垂直な直線 (辺の垂直二等分線) をそれぞれ引いてみましょう。

三角形の 3 頂点をいろいろ動かしてみると、どんなことが見えてくるでしょうか。

このように図形をあれこれ動かしてみると、色々な幾何学的な性質を「発見」することが出来ます。そして、これらの図形はその依存関係で規定され、内部では数式によって処理・描画していることから、「発見」された幾何学的な性質を数式処理により計算で証明することも、原理的には可能な筈です。実際このような定理の「自動証明」も研究されています。計算機が「証明」を行なえるようになると人間は何をすれば良いのかという気にもなりますが、大切なことは、「発見」をするのは人間だということでしょう。

2 遠近法

さて、本日の主題の「視覚を遊ぶ」に進みましょう。図形を色々動かして視覚に働きかける道具として KSEG を用いていきます。

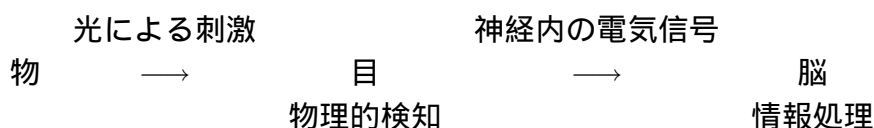
実習 2.1. sample.seg を開いてみましょう。角がへこんで見えますか、出っばって見えますか。

目で物を見ると我々は 2 次元的 (平面的) な情報を得ることが出来ます。しかし、物は本来 3 次元的 (立体的) ですから、物を完全に復元するには情報が足りない訳です。普段は明暗・陰影・動きなどの情報を補助として判断をしているのですが、このような模型的な絵だと判断する情報が足りず、角がへこんでいるのか出っばっているのか判断できないのです。

動きの情報を補助に使って、立体のように見える例を見ましょう。

実習 2.2. perspective.seg を開いてみましょう。上部の半直線上の赤い点を左右に動かすと、下部の図形はどのように見えるでしょうか。

人間の視覚を模式的に表すと、次のように大きく 2 段階に分かれると言えるでしょう。以下では、まず前半部分、光を目で受ける所で遊び、次に後半部分、それを頭が解釈する所で遊びましょう。



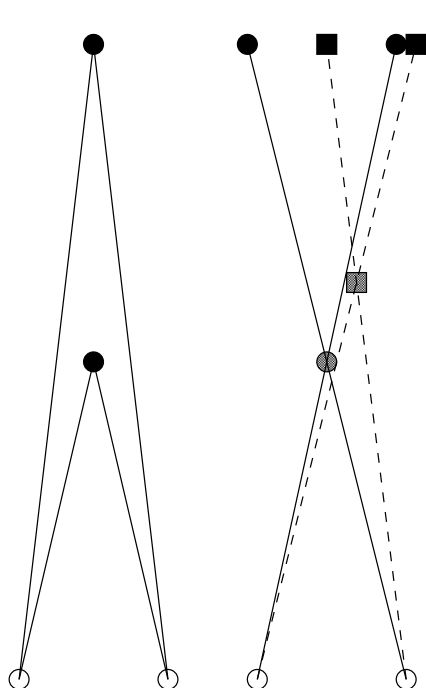
3 立体視

目で検知した 2 次元的 (平面的) な情報から本来の 3 次元的 (立体的) な情報を復元するために、我々は両眼で物を見て、両方からの情報を統合して認識しています。

この視覚の仕組みを意識的にずらして遊んでみましょう。

実習 3.1. stereo.seg を開いてみましょう。

1. 寄り目にして 2 つの枠が重なるように見える練習をします。
2. 左の枠内に図形を好きに描き、「平行移動」の機能を使って、右側に複製を作ります。
3. 先程のように寄り目にして 2 つの枠が重なるようにすると、今描いた図形はどう見えるでしょうか。
4. 寄り目にしたまま上部の半直線上の赤い点を左右に動かす (寄り目にする前に赤い点をマウスで捕まえておく) と、下部の図形はどのように見えるでしょうか。



両眼で物を見ると何故距離感が掴めるかと言うと、物までの距離によって両眼で見た時の視線の方向のずれが異なるからです。これは三角測量の原理と同じで全く幾何学的に図示することが出来ます。(図左)

これに対して、2 つで 1 対のものを両眼でそれぞれ片方ずつ見ると、視線の交点の所に 1 つの物がある時と同じ視線の方向になるので、そこに 1 つの物が浮かんで見えます。これが、寄り目で 2 つの枠が重なるように見えた状態です。ここに、少々ずらし幅を変えて視線の交点が前後にずれるような対を紛れ込ませると、浮かんで見える位置が前後にずれる訳です。(図右)

赤青メガネや偏光メガネなどを使って、それぞれの眼で見える物を限定してやると、この視線のずれを苦勞なく行なえますが、両眼で 2 つとも見えてしまう物を敢えて視線をずらして見るので、慣れやコツも必要ですし、少々疲れますね。ごめんなさい。

4 錯視

目で検知した情報を脳内の神経系で処理することで、有効な情報を取り出して認識しています。しかし、有効な情報を効率良く取り出すということは、ありのままを認識するのではなく、自分で何らかのバイアスを掛けていているということでもあります。

この視覚の仕組みを逆手にとって遊んでみましょう。

実習 4.1. zollner.seg を開いてみましょう。

1. 中央右下端の青い点を微妙に動かして、中央部の縦線が平行に見えるようにしましょう。(すべての縦線が同時に動くようにしてあります。)
2. それが出来たら、右の円周上の赤い点を動かして、斜めの短い線の方を変えてみましょう。中央の縦線はどのように見えるでしょうか。

これは Zöllner 錯視と呼ばれる現象で、古典的な錯視です。交差した所の鋭角側を大きめに認識してしまうことから生ずると言われています。

実習 4.2. hermann.seg を開いてみましょう。左下にある赤い点を右の方に少しずつ動かしていくと、黒い部分が大きくなっていきます。縦横の白い縞の交差する所あたりに何か見えるでしょうか。

これは Hermann 錯視と呼ばれる現象で、やはり古典的な錯視です。

錯視については、脳神経の生理的研究や心理学的研究などが古くから行なわれていますが、近年、新井仁之先生(東京大学)を中心に、錯視を生ずる数理モデルの研究が進展しています。眼が物理的に検知する入力とは2次元の定義域を持つ関数と考えられますが、それにウェーブレット変換と呼ばれる変換を行ない、主要な成分だけを残して(用いる関数系は違いますが、第1回で扱った関数の近似に当たります)、それを逆変換で元に戻すと、錯視された結果そのように見える図形を表す関数に近くなるというのです。実際の脳神経の仕組みがその通りかどうかは数学の範疇から外れますが、このような数理モデルから判ることもいろいろあります。例えば、通常 of 自然な画像に対して上のような画像変換を行なうと、人間が重要と思うような情報が強調されることが判るそうです。以前は錯視は視覚系の欠陥と考えられることもありましたが、このことから、眼で検知した情報から重要な部分を取り出すための仕組みから生ずる現象だと考えられるようになってきました。

このように、数理現象の観察から数学が始まるのみならず、自然現象の観察から数学が始まり、またそれが自然現象の研究へと繋がっているのです。

参考文献

- [1] Ilya Baran, KSEG — Free Interactive Geometry Software.
<http://www.mit.edu/~ibaran/kseg.html>
- [2] KSEG の Wiki ページ. <http://geom.math.metro-u.ac.jp/wiki/index.php?KSEG>
- [3] 新井仁之, 視覚数学 e 研究室. <http://www4.ocn.ne.jp/~arai/mvel/mvel.html>