上智大学コミュニティカレッジ
2008 年度春期講座

「実験から始まる数学 1」 〜コンピュータと数学ソフトウェアで遊ぶ〜

角皆 宏・梅垣 敦紀・青井 久

第 2 話: 図形の動きを体感する (対話型幾何学ソフトウェア KSEG で遊ぶ)

1 対話型幾何学ソフトウェア KSEG

KSEG は Ilya Baran 氏が作成した対話型幾何学ソフトウェアです。マウスを用いて画面上に点を打っていき、選んだ点を結ぶ直線を引いたり、中心と 1 点とを選んで円を描いたり、それらの交点を取ったり、つまり「定規とコンパスとによる作図」をシミュレートできます。しかし、それだけでなく、図形を描いた後で出発点となる点を動かすと、その点に依存して描かれた図形が連動して動く様子を見ることができ、更に、その動く軌跡をも描くことが出来るのです。

この KSEG を用いて、主に高校までの数学で採り上げられる図形の性質を、実際に目で見てみましょう。

2 基本動作

配布 DVD-ROM 中にも解説文書が収録されていますが、ごく基本の動作だけをここに挙げて、今日の講座の参考とします。

2.1 点の構築

とにかく点を打たなければ始まりません。

1. 自由点を打つ
何もない所で、**マウスの右クリック**。この点は自由に動かせる。

2. 線上に点を打つ
既にある曲線 (＝直線 (線分・半直線)・円 (円弧)) の上で、**マウスの右クリック**。この点はその線上のみを動かせる。

3. 交点
2 つの曲線を選択 (次で述べる) → 「交点」を実行する

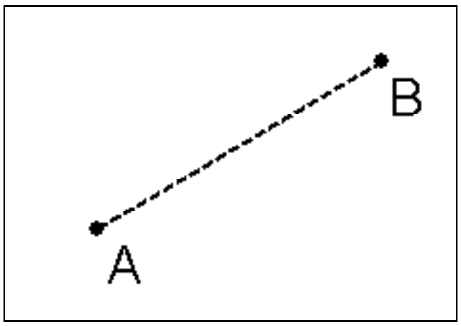
2.2 図形の選択

1. 1つの図形 (曲線・点・軌跡) を選択
   図形上で、**マウスの左クリック**。

2. 2つ以上の図形を選択
   2つめの図形からは、図形上で、**[Shift] を押しながらマウスの左クリック**で、追加の選択が出来る。

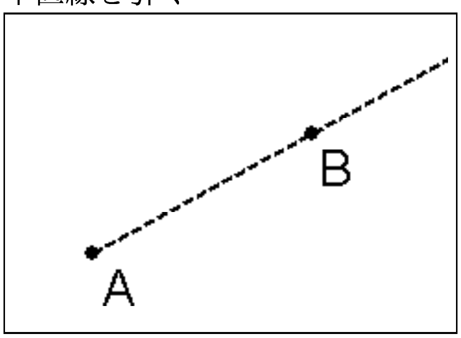
2.3 曲線の構築

1. 線分を引く

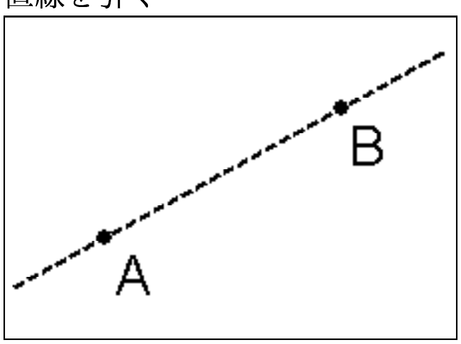
   2点を選択
   →「線分」を実行する
   (見た目に違いはないが、一応内部的には最初に選んだ方の点が起点扱い。)

2. 半直線を引く

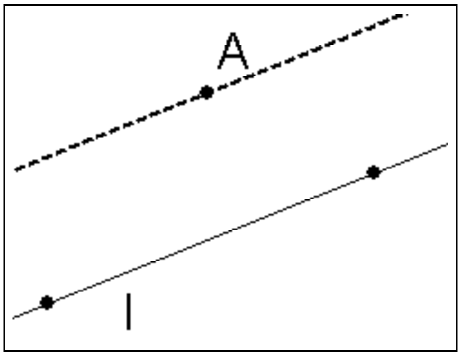
   起点を選ぶ
   → 通る点を追加で選ぶ
   →「半直線」を実行する
   (点の指定の順番を替えると、伸びる向きが替わる。)

3. 直線を引く

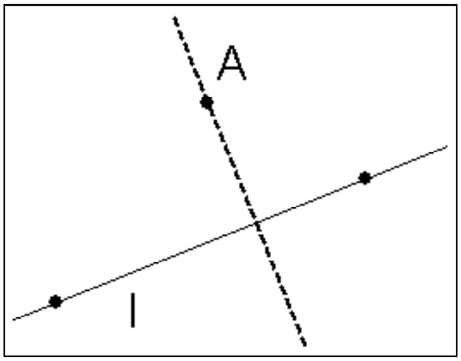
   2点を選ぶ
   →「直線」を実行する
   (見た目に違いはないが、一応内部的には最初に選んだ方の点が起点扱い。)

4. 平行線を引く



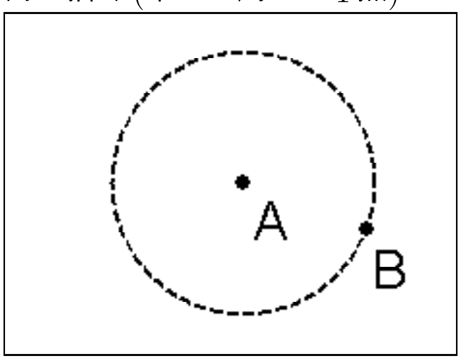
直線 (線分・半直線も可) と 1 点とを選ぶ
→ 「平行線」を実行する

5. 垂線を引く



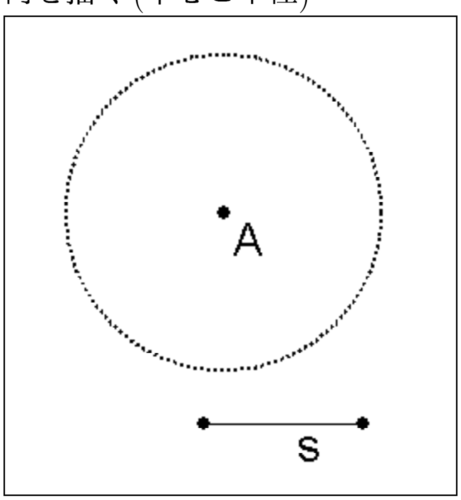
直線 (線分・半直線も可) と 1 点とを選ぶ
→ 「垂線」を実行する
(1 点は直線上でもそうでなくても良い。)

6. 円を描く (中心と周上の 1 点)



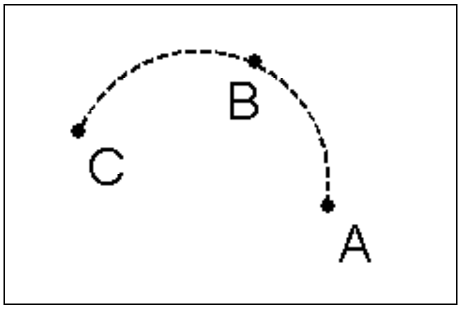
中心を選ぶ
→ 周上の 1 点を追加で選ぶ
→ 「円」を実行する
(点の指定の順番を替えると、中心が替わる。)

7. 円を描く (中心と半径)



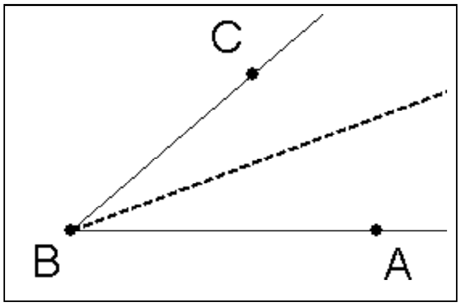
中心と線分とを選ぶ
→ 「円」を実行する

8. 円弧を描く



起点を選択
→ 通過点を追加で選択
→ 終点を追加で選択
→ 「円弧」を実行する

9. 角の二等分線を描く



角を指定する
→ 「角の二等分線」を実行する
ここに、「角の指定」＝ 辺上の 1 点の指定 →
角の頂点の指定 → もう 1 辺上の 1 点の指定
(順番注意)
辺そのもの (直線・半直線・線分) は引いていなくても良い。

3　変換

平行移動・鏡映 (線対称移動)・相似変換 (1 点中心の拡大・縮小)・回転移動を行なうには、基準となるベクトル・直線 (半直線・線分)・中心・角度・倍率を、予め指定しておく必要がある。(メニューで黄色で表示される項目)

3.1　変換の基準の指定

1. ベクトル
   始点を選択 → 終点を追加で選択 → 「ベクトル」を実行

2. 鏡
   直線 (線分・半直線) 選択 → 「鏡」を実行

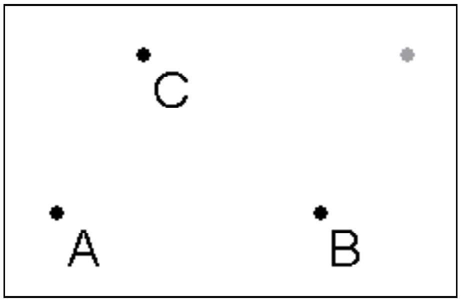
3. 中心
   1 点を選択 → 「点」を実行

4. 角度
   「角を指定」→ 「角度」を実行

5. 倍率
   線分を 2 本選択 (または数値を選択) → 「倍率」を実行

3.2 変換の実行

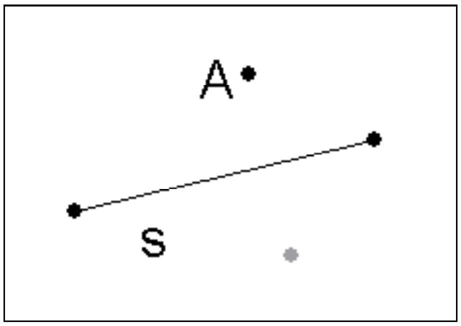
1. 平行移動



始点 A・終点 B を選択
→ ベクトルを指定しておく。

移動する図形を選ぶ
→「平行移動」を実行する

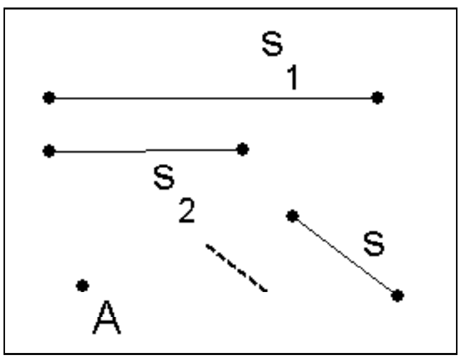
2. 鏡像



線分 s (または直線・半直線) を選択
→ 鏡を指定しておく。

移動する図形を選ぶ
→「鏡像」を実行する

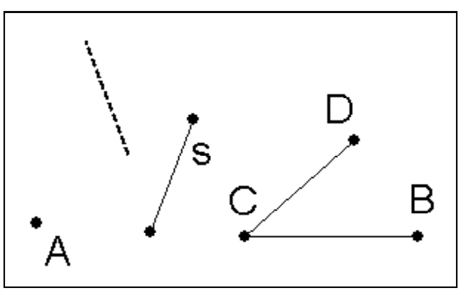
3. 相似変換



中心 A を指定しておく。
線分 s_1, s_2 を選択
(または数値を選択)
→ 倍率を指定しておく。

移動する図形を選ぶ
→「相似変換」を実行する

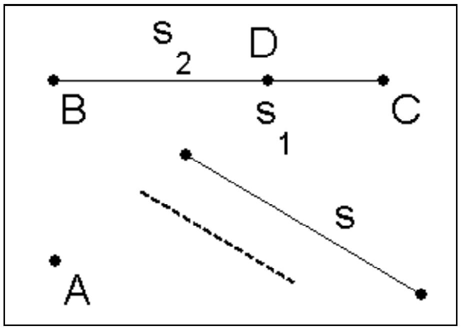
4. 回転移動



中心 A を指定しておく。
角 BCD (または数値) を選択
→ 角度を指定しておく。

移動する図形を選ぶ
→「回転移動」を実行する

5. 相似変換 (良く使う便利な応用編)



中心を指定しておく。
倍率の指定の際に、
線分 BC 上に点 D を取り、
1 本目に線分 BC を、
2 本目に線分 BD を選択
→ 倍率を指定しておく。

移動する図形を選ぶ
→ 「相似変換」を実行する

ここで点 D を動かすと、
倍率が連動して変化する。

4 計測

2 点間の距離・線分の長さ・円周の長さ・角度・傾き・線分の長さの比などを計って、数値として利用することが出来る。数値は計算したり、角度・倍率として指定することが出来る。生で数値を入力し、計算に使ったり指定したりすることも出来る。角度は $360°$ 法。

これを用いると、定規とコンパスとによる通常の作図では描けない図形も描くことが出来るが、作図からは離れる (ことが出来てしまう) ので、ここでは詳細略。

5 軌跡

曲線上に束縛されている点と、それに連動して動く図形とがある時、両者を選択して「軌跡」を実行すると、点に連動して動く図形の軌跡を描くことが出来ます。これは KSEG の大きな機能であり、今日の講座でも活躍します。

点に連動して点が動く場合が通常の軌跡ですが、点に連動する線分・直線・円などの図形の動きを見ることも出来ます。

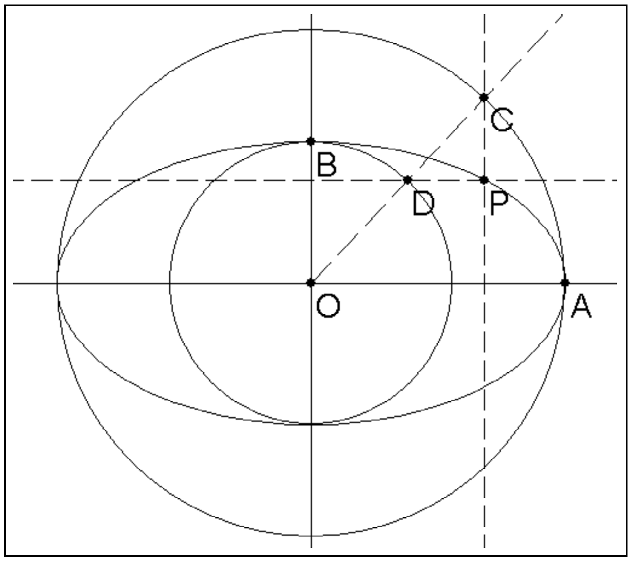
点の軌跡の場合は、元の点を少しづつ動かしながら、多くの点を求めてそれを繋いで表示しているだけなので、軌跡と他の曲線との交点を求めたりすることは出来ません。

6　楕円あれこれ

楕円は、2 定点からの距離の和が一定な点の軌跡です。放物線・双曲線と共に、古代ギリシャの Apollonios によって紀元前 3 世紀にまとめられた「円錐曲線論」で、平面による円錐の切口として定式化され、様々な性質が研究されてきました。ここでは、(3 次元空間内の円錐は扱い難いので、) 他の様々な方法で、楕円を軌跡として描いてみましょう。

6.1　円柱を斜めに切る = 円を一方向に拡大・縮小する

直交する 2 直線上に点 A, B を取り、OA, OB をそれぞれ長径・短径とする楕円を描いてみましょう。これは OA を半径とする円を、OA : OB の比率で一方向に縮小 (拡大) したものです。

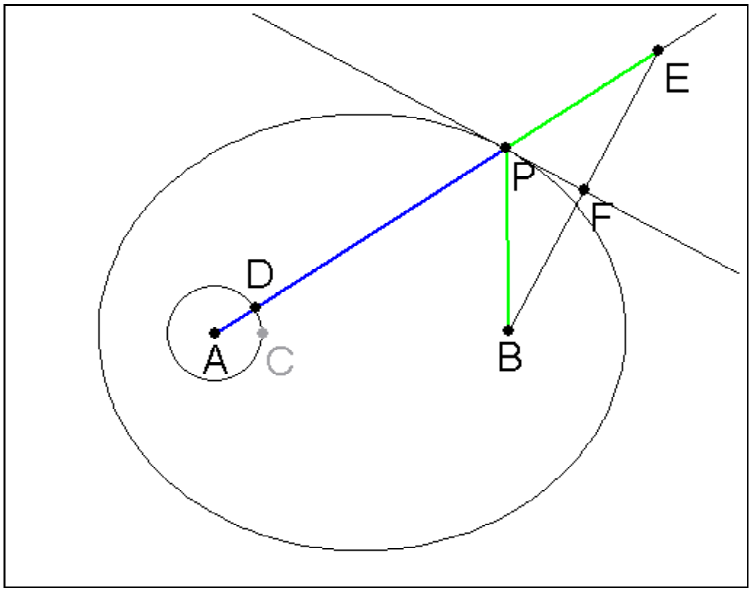


1. 点 O, A を取り、直線で結ぶ。
2. 点 O で直線 OA に垂線を立てる。
3. 垂線上に点 B を取る。
4. 点 O を中心とし、点 A, B を通る円をそれぞれ描く。
5. 点 A を通る円周上に点 C を取る (制御点)。
6. 点 B を通る円と半直線 OC との交点を D とする。
7. 点 C から直線 OA に垂線を下ろす。
8. 点 D から今の垂線に垂線を下ろし、その交点を P とする。
9. 点 C を動かした時の点 P の軌跡を描く。

問　この楕円の焦点を作図して求め、2 焦点から点 P までの距離の和が一定になることを確かめてみましょう。

6.2　2焦点からの距離の和が一定な点の軌跡

定義通りに、2 定点 (焦点) を取り、そこからの距離の和が一定な点の軌跡として、楕円を描いてみましょう。



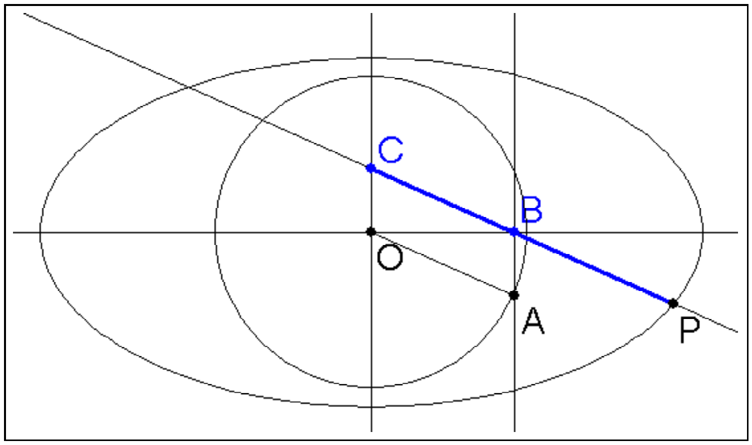
1. 点 A, B を取る。
2. 点 A の近くに点 C を取り、A を中心として円を描く。(点 C は隠しておこう。)
3. 今の円周上に点 D を取る (制御点)。
4. 半直線 AD 上に点 E を取る。(AE が 2 焦点 A, B からの距離の和になる。) 点 A, B を通る円をそれぞれ描く。
5. 線分 BE を引き、中点を F とする。
6. 点 F から線分 BE に垂線を立てる。
7. 半直線 AD と今の垂線との交点を P とする。
8. 点 D を動かした時の点 P の軌跡を描く。

問　点 E を動かすと、(つまり、2 焦点からの距離の和 AE を変えると、) 軌跡はどう変わるでしょう。

問　点 D を動かした時の直線 PF の軌跡を描いてみましょう。

6.3　楕円コンパス

楕円を描くコンパスのような器具があり、古くから (現在でも) 製図・工作に使われています。その原理を再現して、楕円を描いてみましょう。



1. 点 O で直交する 2 直線を描く。
2. 点 O を中心として円を描く。(この半径が楕円の長径と短径との差になる。)
3. 今の円周上に点 A を取る (制御点)。
4. 点 A から一方の直線に垂線を下ろし、その足を B とする。
5. 点 B を通り、線分 OA に平行な直線を引き、もう一方の直線との交点を C とする。
6. 直線 CB 上に点 P を取る。(CP が楕円の長径、BP が楕円の短径となる。)
7. 点 A を動かした時の点 P の軌跡を描く。

問　この楕円の焦点を作図して求め、2 焦点から点 P までの距離の和が一定になることを確かめてみましょう。

7　Pascal の定理

円錐曲線上は、その上にある 5 点で定まります。次の Pascal の定理を利用すると、与えられた 5 点を通る円錐曲線を軌跡として作図することが出来ます。

- 円錐曲線に内接する 6 角形の 3 組の対辺 (の延長) の交点は、同一直線上にある。
- 逆に、6 角形の 3 組の対辺 (の延長) の交点が同一直線上にあるならば、その 6 角形は円錐曲線に内接する (6 点を通る円錐曲線が存在する)。

問　与えられた 5 点を通る円錐曲線を軌跡として作図してみましょう。