Funkcialaj Ekvacioj, 44 (2001) 309–333

Existence Globale et Comportement Asymptotique des Solutions des Équations de Kirchhoff Moyennement Dégénérées avec un Terme Non-Linéaire Dissipatif

By

Mohammed AASSILA and Abbes BENAISSA

(Université de Strasbourg, France and Université Djillali Liabes, Algérie)

1. Introduction

Soit Ω un ouvert borné avec une frontière régulière Γ, on considère le problème aux limites à valeurs initiales

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} u'' - \Phi(\|\nabla_x u\|_2^2)\Delta_x u + g(u') = 0 \text{ dans } \Omega \times [0, +\infty[, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \times [0, +\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad u'(x,0) = u_1(x) \text{ sur } \Omega, \end{cases}$$

Lorsque $n = 1$, l'équation (P) modélise le mouvement transversal d'une corde vibrante. L'équation d'origine est:

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\varepsilon + \frac{Eh}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right|^2 ds \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$$

où $0 \le x \le L$ et $t > 0$, $u(x,t)$ est le déplacement vertical du point x à l'instant t, ρ la densité de masse, h la surface de la section de la corde, L la longueur de la corde, ε la tension initiale de la corde, τ le module de la résistance, E le module de Young du matériel et f la force extérieure (par exemple l'action de la pesanteur). Lorsque $g = f = 0$, cette équation a été proposée en 1876 par G. Kirchhoff [17].

Plusieurs auteurs ([25], [32], ...) se sont penchés sur l'étude systématique des problèmes relatifs à des équations du type

$$(*) \qquad u_{tt}(t,x) = \Phi\left(\int_P |\nabla_x u(t,x)|^2 dx \right) \Delta_x u$$

sous la condition $\Phi(s) \ge m > 0$ exprimant le caractère hyperbolique strict de l'équation, et des résultats d'existence locale dans certains espaces de Sobolev ont pu être établis. Reprenant les travaux de S. I. Pohozaev [31], dans un cadre abstrait, J. L. Lions a présenté une collection de problèmes liés à ces équations. Un de ces problèmes consiste à considérer ces équations sous une

condition d'hyperbolicité faible ($\Phi(s) \geq 0$). Dans ce cadre, A. Arosio-S. Spagnolo [7] et P. D' Ancona-S. Spagnolo [9] ont donné une réponse positive dans la classe des fonctions deux fois continûment différentiables par rapport au temps et analytiques par rapport aux variables d'espaces x. D'autres auteurs ont étudié dans des espaces de Sobolev le cas "moyennement dégénéré" ou le cas de "la bonne dégénerescence", (voir H. R. Crippa [8], Y. Ebihara-L. A. Medeiros-M. M. Miranda [12], L. A. Medeiros-M. M. Miranda [26], Y. Yamada [36], T. Yamazaki [37], A. Arosio-S. Garavaldi [6], et ils ont prouvé l'existence locale de la solution. Pour traiter l'existence globale des équations de Kirchhoff moyennement dégénérées, il est naturel d'ajouter un terme dissipatif (par exemple $u', -\Delta_x u', \Delta_x^2 u$).

Dans [29], K. Nishihara et Y. Yamada ont étudié le problème (P) lorsque $\Phi(r) = r^\alpha$ ($\alpha \geq 1$) et $g(x) = \tau x$ et M. Aassila [1] a étendu ce travail au cas où g est nonlinéaire. Dans [13], M. Ghisi et M. Gobbino ont étudié le problème (P) lorque $g(x) = \tau x$.

Dans ce travail, on se propose d'étudier dans $[0, +\infty[\times \Omega$ le problème aux limites à valeurs initiales (P), avec des conditions sur la taille des données initiales. On prouvera l'existence et l'unicité d'une solution globale faible dans des espaces de Sobolev en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin et nous déterminerons le comportement asymptotique de la solution à l'aide d'une technique dûe à Aassila [2] introduite pour l'étude des propriétés de stabilité asymptotique forte de certains systèmes distribués.

2. Notions préliminaires

Lemme 2.1. *Soit $T > 0$, et soit $f \in C^1([0, T[; \boldsymbol{R})$. On suppose que $f(t) \geq 0$ dans $[0, T[$, et qu'il existe deux constantes $c_1 > 0$, $c_2 \geq 0$ telles que*

$$f'(t) \leq -\sqrt{f(t)}(c_1\sqrt{f(t)} - c_2) \qquad \forall t \in [0, T[.$$

Alors,

$$\sqrt{f(t)} \leq \max\left\{\sqrt{f(0)}, \frac{c_2}{c_1}\right\} \qquad \forall t \in [0, T[.$$

Lemme 2.2 (Inégalité de Sobolev-Poincaré). *Soit α un nombre avec $0 \leq \alpha < +\infty$ $(n = 1, 2)$ ou $0 \leq \alpha \leq 4/(n-2)$ $(n \geq 3)$. Alors, il existe une constante $C(\alpha, \Omega)$ telle que*

$$\|u\|_{\alpha+2} \leq C(\alpha, \Omega)\|\nabla_x u\|_2 \qquad \text{pour } u \in H_0^1(\Omega).$$

Lemme 2.3 ([18] p. 12). *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\boldsymbol{R}_x^n \times \boldsymbol{R}_t$, g_μ et g des fonctions de $L^q(\mathcal{O})$, $1 < q < \infty$, telles que*

$$\|g_\mu\|_{L^q(\mathcal{O})} \leq C, \qquad g_\mu \to g \text{ p.p dans } \mathcal{O}.$$

Alors

$$g_\mu \to g \text{ dans } L^q \text{ faible.}$$

Lemme 2.4 [4]. *Soient* $\alpha, \beta \in L^1[0,T]$ *tels que* $\alpha, \beta \geq 0$ *et soit* C *une constante* ≥ 0. *Soit* g *une fonction continue de* $[0,T]$ *dans* $\boldsymbol{R}^+$ *vérifiant*

$$0 \leq g(s) \leq C + 2\int_0^s \alpha(r)\sqrt{g(r)}\,dr + \int_0^s \beta(r)g(r)dr \qquad (0 \leq s \leq T).$$

Alors

$$g(t) \leq \left(\sqrt{C} + \int_0^t \alpha(s)ds\right)^2 e^{\left(\int_0^t \beta(s)ds\right)} \qquad \text{pour tout } t \in [0,T].$$

Preuve du lemme 2.1.

D'après l'hypothèse on a

$$(e^{c_1 s} f(s))' \leq c_2 e^{c_1 s}\sqrt{f(s)}.$$

Posons

$$y(s) = e^{c_1 s} f(s),$$

donc on a

$$\text{(D)} \qquad y(t) \leq y(0) + \int_0^t c_2 e^{c_1/2s}\sqrt{y(s)}\,ds.$$

En appliquant le lemme 2.3 à (D) on déduit

$$y(t) \leq \left(\sqrt{y(0)} + \frac{c_2}{c_1}(e^{c_1/2t} - 1)\right)^2,$$

par suite on obtient

$$\sqrt{f(t)} \leq \left(\left(\sqrt{f(0)} - \frac{c_2}{c_1}\right)e^{-c_1/2t} + \frac{c_2}{c_1}\right),$$

l'étude de la fonction qui se trouve à droite de l'inégalité ci-dessus nous permet d'établir le résultat annoncé. □

3. Notations et résultats

Soit Ω un ouvert borné de $\boldsymbol{R}^n$ avec une frontière régulière Γ. $L^2(\Omega)$ représente l'espace des fonctions de carré intégrable sur Ω muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ et la norme $\|\cdot\|_2$, sur l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, nous considérons la norme suivante

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = \|\nabla_x u\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx$$

et le produit scalaire associé:

$$(u,v)_{H_0^1} = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx.$$

Soit $A = -\Delta$ l'opérateur de Laplace sur $L^2(\Omega)$, $D(-\Delta) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta_x u \in L^2(\Omega)\} = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, A possède les propriétes suivantes:

(a) $\exists m_0 > 0$ telle que $(-\Delta_x u, u) \geq m_0 \|u\|_2^2 \ \forall u \in H_0^1 \cap H^2(\Omega)$,

(b) $(-\Delta_x u, u) = \|\nabla_x u\|_2^2, \ \forall u \in H_0^1 \cap H^2(\Omega)$,

(c) Il existe une suite $(\lambda_j)_{j \in \boldsymbol{N}}$ de nombres réels et une suite $(\omega_j)_{j \in \boldsymbol{N}}$ de $L^2(\Omega)$ telles que:

$$\begin{cases} m_0 \leq \lambda_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \cdots \leq \lambda_j^2 \cdots \\ -\Delta \omega_j = \lambda_j^2 \omega_j, \qquad \forall j \in \boldsymbol{N} \\ \lim\limits_{j \to +\infty} \lambda_j^2 = +\infty \end{cases}$$

$\{\omega_j\}_j$ est un système orthonormale complet dans $L^2(\Omega)$ et orthogonale dans $H_0^1(\Omega)$ et dans $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

On supposera que $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ est une fonction continue croissante et vérifie les hypothèses suivantes:

$$g(0) = 0, \tag{1}$$

$$g'(x) \geq \tau > 0, \tag{2}$$

$$|g(x)| \leq c_1 |x|^q, \tag{3}$$

où c_1 et τ sont deux constantes et $q \geq 1$ telles que $(n-2)q \leq n+2$. Posons

$$E(t) = \frac{\|u'(t)\|_2^2}{\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)} + \|\nabla_x u(t)\|_2^2, \tag{4}$$

$$F(t) = \frac{\|\nabla_x u'(t)\|_2^2}{\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)} + \|\Delta_x u(t)\|_2^2. \tag{5}$$

Théorème 3.1. *Soit $\Phi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction localement Lipschitzienne. Supposons que les conditions (1), (2) et (3) sont satisfaites. Pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \in H^2 \cap H_0^1 \times H_0^1 \cap L^{2q}$ vérifiant*

$$\Phi(\|\nabla_x u_0\|_2^2) > 0, \tag{6}$$

$$\max_{0 \leq s \leq E(0)} |\Phi'(s)| \max\left\{ \frac{\|u_1\|_2}{\Phi(\|\nabla_x u_0\|_2^2)}, \frac{2}{\tau} \sqrt{F(0)} \right\} \sqrt{F(0)} < \frac{\tau}{8} \tag{7}$$

où

$$F(0) = \frac{\|\nabla_x u_1\|_2^2}{\Phi(\|\nabla_x u_0\|_2^2)} + \|\Delta_x u_0\|_2^2, \qquad E(0) = \frac{\|u_1\|_2^2}{\Phi(\|\nabla_x u_0\|_2^2)} + \|\nabla_x u_0\|_2^2.$$

Alors, le problème (P) *admet une solution globale unique faible*

$$u \in W^{2,\infty}([0,+\infty[; L^{(q+1)/q}) \cap W^{1,\infty}([0;+\infty[; H_0^1) \cap L^\infty([0;+\infty[; H^2 \cap H_0^1)$$

$$u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega)) \text{ et } u'' \in L^\infty([0,T]; L^2(\Omega)) \qquad \forall T > 0$$

et on a:

$$\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2) > 0 \text{ dans } [0,+\infty[. \tag{8}$$

Théorème 3.2. *En plus des hypothèses du théorème* 3.1, *nous supposons que*

$$|g(x)| \le c_2|x| \qquad \text{si } |x| \le 1 \qquad (\text{qui découle de } (3)), \tag{9}$$

alors il existe F_∞ *et* E_∞ *telles que*

$$(F(t), E(t)) \to (F_\infty, E_\infty) \qquad \text{lorsque } t \to +\infty \tag{C}$$

et on a

$$\int_0^\infty \|\nabla_x u'(t)\|_2^2 dt < +\infty, \tag{10}$$

$$u'(t) \to 0 \text{ dans } L^2(\Omega). \tag{11}$$

Si $F_\infty = 0$ *alors on a*:

$$(u(t), u'(t), u''(t)) \to (0,0,0) \text{ dans } H_0^1 \cap H^2 \times H_0^1 \times L^{(q+1)/q}$$

lorsque $t \to +\infty$. *Si* $E_\infty > 0$ *alors on a*:

$$(u'(t), u''(t)) \to (0,0) \text{ dans } H_0^1 \times L^{(q+1)/q} \qquad \text{lorsque } t \to +\infty,$$

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2) = 0.$$

Corollaire 3.1. *Si* $\Phi(0) = 0$ *et* $\Phi(r) > 0$ *dans un voisinage à droite de* $r = 0$ *de la forme* $]0, r_0]$ *et supposons que* $E(0) \le r_0$, *alors on a*:

$$(u(t), u'(t), u''(t)) \to (0,0,0) \text{ dans } H_0^1 \times H_0^1 \times L^{(q+1)/q}, \tag{12}$$

lorsque $t \to +\infty$.

Corollaire 3.2 ([13]). *Si* $g(x) = \tau x$, *alors on a*: *il existe* $u_\infty \in H_0^1 \cap H^2$ *telle que*

$$(u(t), u'(t), u''(t)) \to (u_\infty, 0, 0) \text{ dans } H_0^1 \cap H^2 \times H_0^1 \times L^2, \tag{13}$$

lorsque $t \to \infty$. *De plus, ou bien* $u_\infty = 0$, *ou bien* $\Phi(\|\nabla_x u_\infty\|_2^2) = 0$.

Remarque 3.1. a) Si $\Phi(r) \geq v > 0$ pour tout $0 \leq r \leq E(0)$ alors on a toujours $E_\infty = 0$.

b) Avec des petits changements, on obtient les mêmes résultats pour le modèle de Carrier, i.e., en remplaçant le coefficient $\Phi(\|\nabla_x u\|_2^2)$ par $\Phi(\|u\|_2^2)$, ainsi il n'est pas nécessaire que le problème soit de type variationel.

c) Le corollaire 3.1 est une généralisation du travail de M. Aassila [1], mais on ne peut pas utiliser l'inégalité de M. Nakao [28] pour estimer la vitesse de décroissance de la solution sauf pour des cas particuliers par exemple $\Phi(r) = r^\alpha$, $\alpha \geq 1$.

d) On peut généraliser le corollaire 3.2 au cas où Ω est non borné et l'opérateur $-\Delta_x$ est remplacé par un opérateur A autoadjoint faiblement coercif ($(Au, u) \geq 0 \ \forall u \in D(A)$) en utilisant un théorème de diagonalisation (décomposition spectrale) (voir [11]) qui nous permet d'étudier le problème indépendamment de la compacité (voir [19] et [21]).

e) En utilisant l'inégalité de Gagliardo-Niremberg, on peut avoir les mêmes résultats pour des cas particuliers de q et n qui ne vérifient pas la relation $(n-2)q \leq n+2$.

f) Si $q = 1$, alors on peut considérer le cas $F_\infty > 0$, à la place du cas $E_\infty > 0$ dans le théorème 3.2.

4. Démonstration des résultats

Preuve du théorème 3.1.

On va utiliser la méthode de Faedo-Galerkin. Soient (w_j) les fonctions propres de $-\Delta_x$. On cherche $u_m(t)$ solution approchée du problème sous la forme

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm} w_j$$

les g_{im} étant à déterminer par les conditions:

$$(14) \qquad \begin{cases} (u_m''(t) - (m^{-1} + \Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2))\Delta_x u_m(t) + g(u_m'(t)), w_j) = 0, \\ 1 \leq j \leq m, \end{cases}$$

$$(15) \qquad u_m(0) = u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} (u_0, w_j) w_j \to u_0 \text{ dans } H_0^1 \cap H^2 \text{ lorsque } m \to +\infty,$$

$$(16) \qquad u_m'(0) = u_{1m} = \sum_{j=1}^{m} (u_1, w_j) w_j \to u_1 \text{ dans } H_0^1 \cap L^{2q} \text{ lorsque } m \to +\infty.$$

D'après les résultats généraux sur les systèmes d'équations différentielles, on est assuré de l'existence d'une solution locale de (14), (15) et (16) qui se prolonge en un intervalle maximale $[0, t_m[$ par le lemme de Zorn puisque les termes non-linéaires dans (14) sont continus localement Lipschitziens. Les estimations a priori qui suivent montrerons que $t_m = T$.

i) Estimations a priori 1.

On multiplie l'équation (14) d'indice j par $2g'_{jm}$ et l'on somme en j. Il vient

$$\frac{d}{dt}\left(\|u'_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{m}\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2 + M(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)\right) + 2\int_\Omega g(u'_m(t))u'_m(t)dx = 0,$$

d'où

$$\|u'_m(t)\|_2^2 + M(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2) + 2\int_0^t \int_\Omega g(u'_m)u'_m \, dsdx \tag{17}$$

$$\leq \|u_1\|_2^2 + M(\|\nabla_x u_0\|_2^2) + \|\nabla_x u_0\|_2^2,$$

d'ici, on obtient

$$\|u'_m(t)\|_2 \leq c, \qquad M(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2) \leq c. \tag{18}$$

où $M(s) = \int_0^s \Phi(t)dt$.

Utilisant (3) et (17), on en déduit:

$$u'_m g(u'_m) \text{ demeure dans un borné } de\ L^1(\Omega \times [0, T]), \tag{19}$$

$$g(u'_m) \text{ demeure dans un borné } de\ L^{(q+1)/q}(\Omega \times [0, T]). \tag{20}$$

ii) Estimations a priori 2.

Posons

$$F_m(t) = \frac{\|\nabla_x u'_m(t)\|_2^2}{m^{-1} + \Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)} + \|\Delta_x u_m(t)\|_2^2.$$

En dérivant $F_m(t)$ par rapport à t, nous obtenons

$$F'_m(t) = \frac{2(-g(u'_m), -\Delta_x u'_m)}{m^{-1} + \Phi(\|\nabla_x u_m\|_2^2)} - \frac{2(\nabla_x u_m, \nabla_x u'_m)\|\nabla_x u'_m\|_2^2 \Phi'(\|\nabla_x u_m\|_2^2)}{(m^{-1} + \Phi(\|\nabla_x u_m\|_2^2))^2}.$$

En utilisant (2), on obtient

$$F'_m(t) \leq \frac{-1}{m^{-1} + \Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)}\left(2\tau + \frac{\frac{d}{dt}\Phi(\|\nabla_x u_m\|_2^2)}{m^{-1} + \Phi(\|\nabla_x u_m\|_2^2)}\right)\|\nabla_x u'_m\|_2^2,$$

avec

$$\frac{d}{dt}\Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2) = 2(\nabla_x u_m(t), \nabla_x u_m'(t))\Phi'(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2).$$

On va montrer que

$$\left|\frac{\frac{d}{dt}\Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)}{m^{-1} + \Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)}\right| \leq \frac{\tau}{2} \qquad \forall 0 \leq t \leq +\infty. \tag{21}$$

Pour cela posons

$$E_m(t) = \frac{\|u_m'(t)\|_2^2}{m^{-1} + \Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)} + \|\nabla_x u_m(t)\|_2^2,$$

$$G_m(t) = \frac{\|u_m'(t)\|_2}{m^{-1} + \Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)}.$$

En dérivant $E_m(t)$ et $G_m(t)$ par rapport à t, à l'aide de (2) on obtient

$$E_m'(t) \leq -\frac{1}{m^{-1} + \Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)}\left(2\tau + \frac{\frac{d}{dt}\Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)}{m^{-1} + \Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)}\right)\|u_m'(t)\|_2^2, \tag{22}$$

$$(G_m^2(t))' \leq -G_m(t)\left\{2\left(\tau + \frac{\frac{d}{dt}\Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)}{m^{-1} + \Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)}\right)G_m(t) - 2\|\Delta_x u_m(t)\|\right\}. \tag{23}$$

Supposons que sur $[0, t_m[$ on a:

$$\left|\frac{\frac{d}{dt}\Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)}{m^{-1} + \Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)}\right| \leq \frac{\tau}{2} \qquad \forall 0 \leq t < t_m. \tag{24}$$

Il est facile de voir que $F_m(t) \leq F_m(0)$ pour $0 \leq t < t_m$. En plus on a:

$$\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2 \leq E_m(t) \leq E_m(0), \qquad \forall t \in [0, t_m[, \tag{25}$$

$$\|\Delta_x u_m(t)\|_2^2 \leq F_m(t) \leq F_m(0), \qquad \forall t \in [0, t_m[. \tag{26}$$

En appliquant le lemme 2.1 à $f = G_m^2$, on a

$$G_m(t) \leq \max\left\{G_m(0), \frac{2}{\tau}\sqrt{F_m(0)}\right\}, \qquad \forall t \in [0, t_m[. \tag{27}$$

Montrons que (24) est vérifiée, on commence par vérifier que

$$\left|\frac{\frac{d}{dt}\Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)}{m^{-1}+\Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)}\right|_{t=0} \leq \frac{\tau}{2}. \tag{28}$$

En effet, d'après (7) on a:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\frac{d}{dt}\Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)}{m^{-1}+\Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)}\right|_{t=0} &= \left|\frac{2(\nabla_x u_{0m}, \nabla_x u_{1m})\Phi'(\|\nabla_x u_{0m}\|_2^2)}{m^{-1}+\Phi(\|\nabla_x u_{0m}\|_2^2)}\right| \\
&\leq 2 \max_{0\leq s\leq E_m(0)} |\Phi'(s)| \frac{\|u_{1m}\|}{m^{-1}+\Phi(\|\nabla_x u_{0m}\|_2^2)} \|\Delta_x u_{0m}\|_2 \\
&\leq 2 \max_{0\leq s\leq E_m(0)} |\Phi'(s)| \frac{\|u_{1m}\|}{m^{-1}+\Phi(\|\nabla_x u_{0m}\|_2^2)} \sqrt{F_{0m}} \\
&\leq 4 \max_{0\leq s\leq E(0)} |\Phi'(s)| \frac{\|u_1\|}{\Phi(\|\nabla_x u_0\|_2^2)} \sqrt{F_0} \\
&\leq \frac{\tau}{2}
\end{aligned}$$

pour m suffisamment grand. Supposons que (24) n'est pas vérifiée sur $[0, t_m[$, puisque $\Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)$ et $(d/dt)\Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)$ sont continues, donc (28) implique qu'il existe $t^* > 0$ tel que

$$\left|\frac{\frac{d}{dt}\Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)}{m^{-1}+\Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)}\right| \leq \frac{\tau}{2} \quad \forall t \in [0, t^*[\quad \text{et} \quad \left|\frac{\frac{d}{dt}\Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)}{m^{-1}+\Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)}\right|_{t=t^*} = \frac{\tau}{2}. \tag{29}$$

Pour m suffisamment grand et $t \in [0, t^*]$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\frac{d}{dt}\Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)}{m^{-1}+\Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)}\right| &\leq 2 \max_{0\leq r\leq E_m(0)} |\Phi'(r)| \frac{\|u_m'(t)\|}{m^{-1}+\Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)} \|\Delta_x u_m(t)\| \\
&\leq 2 \max_{0\leq r\leq E_m(0)} |\Phi'(r)| \max\left\{G_m(0), \frac{2}{\tau}\sqrt{F_m(0)}\right\} \sqrt{F_m(0)} < \frac{\tau}{2}
\end{aligned}$$

ce qui contredit (29).

Montrons que $t_m = +\infty$. En effet, supposons que $t_m < +\infty$. Alors, d'après (26), (24) et (15)–(16), il vient que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to t_m^-} \sup(\|\nabla_x u_m'(t)\|_2^2 + \|\Delta_x u_m(t)\|_2^2) &\leq \max\{1, (m^{-1}+\Phi(\|\nabla_x u_{0m}\|_2^2))e^{\tau t_m}\} F_m(0) \\
&\leq C < +\infty
\end{aligned}$$

où C est indépendant de m. Donc $u_m(t_m)$ et $u'_m(t_m)$ existent. En répétant le même procédé pour le problème (14)–(16) dans l'intervalle $[t_m, T]$ avec les conditions initiales $u_m(t_m)$ et $u'_m(t_m)$. Comme $u_m(t)$ est uniformément bornée, alors l'application $u \mapsto \Phi(\|\nabla_x u\|_2^2)\Delta_x u$ est continue localement Lipschitzienne. Donc la solution $u_m(t)$ est prolongeable en dehors de $[0, t_m[$. Par suite, on déduit que toute solution maximale est globale, donc le problème admet une solution globale. Enfin on obtient

$$\|\Delta_x u_m(t)\|_2 \leq c, \tag{30}$$

$$\frac{\|\nabla_x u'_m(t)\|_2}{(m^{-1} + \Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2))^{1/2}} \leq c. \tag{31}$$

iii) Estimations a priori 3.

On déduit de (14):

$$\|u''_m(0)\|_2 \leq \left(\frac{1}{m} + \Phi(\|\nabla_x u_{0m}\|_2^2)\right)\|\Delta_x u_{0m}\|_2 + \|g(u_{1m})\|_2$$

$$\leq (1 + \Phi(\|\nabla_x u_{0m}\|_2^2))\|\Delta_x u_{0m}\|_2 + \|g(u_{1m})\|_2.$$

D'après (3), $g(u_{1m})$ est borné dans $L^2(\Omega)$, et donc grâce à (15) et (16):

$$\|u''_m(0)\|_2 \leq C.$$

Dérivons (14) en t, il vient:

$$(u'''_m(t) - 2\Phi'(\|\nabla_x u_m\|_2^2)(\nabla_x u'_m(t), \nabla_x u_m(t))\Delta_x u_m(t) \tag{32}$$

$$- \left(\frac{1}{m} + \Phi(\|\nabla_x u_m\|_2^2)\right)\Delta_x u'_m(t) + u''_m(t)g'(u'_m), w_j) = 0.$$

Multipliant par $2g''_{jm}(t)$ et sommant en j, on en déduit:

$$\frac{d}{dt}\left(\|u''_m(t)\|_2^2 + \left(\frac{1}{m} + \Phi(\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2)\right)\|\nabla_x u'_m(t)\|_2^2\right) + 2\int_\Omega u''^2_m g'(u'_m(t))dx \tag{33}$$

$$= 2\Phi'(\|\nabla_x u_m\|_2^2)(\nabla_x u'_m(t), \nabla_x u_m(t))\|\nabla_x u'_m(t)\|_2^2$$

$$+ 4\Phi'(\|\nabla_x u_m\|_2^2)(\nabla_x u'_m(t), \nabla_x u_m(t))(\Delta_x u_m(t), u''_m(t))$$

$$\leq 2|\Phi'(\|\nabla_x u_m\|_2^2)|\,\|\nabla_x u'_m(t)\|_2^3\|\nabla_x u_m(t)\|_2$$

$$+ 4|\Phi'(\|\nabla_x u_m\|_2^2)|\,\|\nabla_x u'_m(t)\|_2\|\nabla_x u_m(t)\|_2\|\Delta_x u_m(t)\|_2\|u''_m(t)\|_2$$

$$\leq 2|\Phi'(\|\nabla_x u_m\|_2^2)|\,\|\nabla_x u'_m(t)\|_2^3\|\nabla_x u_m(t)\|_2$$

$$+ 16|\Phi'(\|\nabla_x u_m\|_2^2)|^2\|\nabla_x u'_m(t)\|_2^2\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2\|\Delta_x u_m(t)\|_2^2 + \|u''_m(t)\|_2^2$$

et alors

$$\frac{d}{dt}\left(\|u_m''(t)\|_2^2+\frac{1}{m}\|\nabla_x u_m'(t)\|_2^2+\Phi(\|\nabla_x u_m\|_2^2)\|\nabla_x u_m'(t)\|_2^2\right)$$

$$+2\int_\Omega u_m''^2 g'(u_m')dx \le g_m(t)+\|u_m''(t)\|_2^2,$$

où

$$g_m(t)=2|\Phi'(\|\nabla_x u_m\|_2^2)|\,\|\nabla_x u_m'(t)\|_2^3\|\nabla_x u_m(t)\|_2$$

$$+16|\Phi'(\|\nabla_x u_m\|_2^2)|^2\|\nabla_x u_m'(t)\|_2^2\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2.$$

Grâce au lemme de Gronwall, on déduit alors:

$$\|u_m''(t)\|_2^2+\frac{1}{m}\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2+\Phi(\|\nabla_x u_m\|_2^2)\|\nabla_x u_m'(t)\|_2^2$$

$$\le e^T\left(\|u_m''(0)\|_2^2+\frac{1}{m}\|\nabla_x u_m(0)\|_2^2+\Phi(\|\nabla_x u_m(0)\|_2^2)\nabla_x u_m'(0)\|_2^2\right)+e^T\int_0^T g_m(s)ds$$

pour tout $t\in \boldsymbol{R}_+$, et on obtient

(34) $\quad u_m''(t)$ demeure dans un borné *de* $L^\infty_{loc}(0,+\infty;L^2(\Omega))$.

iv) Passage à la limite.

Par (30) et (31) on obtient l'estimation

(35) $\quad \|\nabla_x u_m(t)\|_2^2+\|\nabla_x u_m'(t)\|_2^2+\|\Delta_x u_m(t)\|_2^2\le C_1, \qquad \forall t\in[0,T],\ \forall m\in \boldsymbol{N}$

Par (34) et (35), on a pour tout $t,s\in[0,T]$

(36) $$\|\nabla_x(u_m(t)-u_m(s))\|_2\le\sqrt{C_1}|t-s|,$$

(37) $$\|u_m'(t)-u_m'(s)\|_2\le C_2|t-s|$$

Par les estimations précédentes, nous avons:

$(u_m)_{m\in N}$ est uniformément bornée dans $[0,T]$ suivant la norme de $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ et équicontinue suivant la norme de $H_0^1(\Omega)$.

$(u_m')_{m\in N}$ est uniformément bornée dans $[0,T]$ suivant la norme de $H_0^1(\Omega)$ et équicontinue suivant la norme de $L^2(\Omega)$.

Alors par le théorème d'Ascoli-Arzela, il existe une fonction $u:\Omega\times[0,T]\to \boldsymbol{R}$ et une sous suite de (u_m) que l'on note aussi u_m telle que

(38) $$u\in C([0,T];H_0^1(\Omega))\cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$$

(39) $$\begin{cases} u_m\to u \text{ fortement dans } C([0,T];H_0^1(\Omega)),\\ u_m'\to u' \text{ fortement dans } C([0,T];L^2(\Omega)).\end{cases}$$

De plus, comme $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ sont des espaces de Banach reflexifs, alors

$$u_m \to u \text{ dans } L^\infty_{loc}(0,\infty; H_0^1 \cap H^2) \text{ faible}^* \tag{40}$$

$$u'_m \to u' \text{ dans } L^\infty_{loc}(0,\infty; H_0^1) \text{ faible}^* \tag{41}$$

$$u''_m \to u'' \text{ dans } L^\infty_{loc}(0,\infty; L^2) \text{ faible}^* \tag{42}$$

en plus, on a

$$u_m \to u \text{ p.p. dans } \Omega \times [0,T], \tag{43}$$

$$u'_m \to u' \text{ p.p. dans } \Omega \times [0,T], \tag{44}$$

$$g(u'_m) \to \chi \text{ dans } L^{(q+1)/q}(\Omega \times (0,T)) \text{ faible}^* \tag{45}$$

$$\Phi(\|\nabla_x u_m\|_2^2)\Delta_x u_m \to \psi \text{ dans } L^\infty_{loc}(0,\infty; L^2) \text{ faible}^* \tag{46}$$

pour des fonctions convenables $u \in L^\infty(0,T; H_0^1 \cap H^2)$, $\psi \in L^\infty(0,T;L^2)$ et $\chi \in L^{(q+1)/q}(\Omega \times (0,T))$ pour tout $T \geq 0$. On va montrer que u est une solution du problème (P). Par (40)–(42), on déduit que

$$\int_\Omega u_m(0) w_j \, dx \to \int_\Omega u(0) w_j \, dx \qquad \text{et} \qquad \int_\Omega u'_m(0) w_j \, dx \to \int_\Omega u'(0) w_j \, dx$$

pour tout $j \geq 1$ fixé. Par (15)–(16) on déduit que $u(0) = u_0$ et $u'(0) = u_1$. Prouvons que $\psi = \Phi(\|\nabla_x u\|_2^2)\Delta_x u$, i.e.,

$$\Phi(\|\nabla_x u_m\|_2^2)\Delta_x u_m \to \Phi(\|\nabla_x u\|_2^2)\Delta_x u \text{ dans } L^\infty_{loc}(0,+\infty; L^2) \text{ faible}^*.$$

Pour $u \in L^2(0,T;L^2)$, on a:

$$\begin{aligned} \int_0^T (\psi - \Phi(\|\nabla_x u\|_2^2)\Delta_x u, v) dt &= \int_0^T (\psi - \Phi(\|\nabla_x u_m\|_2^2)\Delta_x u_m, v) dt \\ &\quad + \int_0^T \Phi(\|\nabla_x u\|_2^2)(\Delta_x u_m - \Delta_x u, v) dt \\ &\quad + \int_0^T (\Phi(\|\nabla_x u_m\|_2^2) - \Phi(\|\nabla_x u\|_2^2))(\Delta_x u_m, v) dt, \end{aligned} \tag{47}$$

le premier et le deuxième terme dans (47) tendent vers zéro lorsque $m \to +\infty$, et pour le troisième terme on a

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^T (\Phi(\|\nabla_x u_m\|_2^2) - \Phi(\|\nabla_x u\|_2^2))(\Delta_x u_m, v) dt \right| \\ &\quad \leq c \int_0^T (\|\nabla_x u_m - \nabla_x u\|_2)(\|\nabla_x u_m\|_2 + \|\nabla_x u\|_2)\|\Delta_x u_m\|_2 \|v\|_2 dt, \end{aligned}$$

comme (u_m) est bornée dans $L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$ et l'injection $H^2(\Omega)\cap H_0^1 \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ est compacte, on a

$$u_m \to u \qquad \text{dans} \qquad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ fortement},$$

de là

$$\int_0^T\int_\Omega (u_m'' - \Phi(\|\nabla_x u_m\|_2^2)\Delta_x u_m)v\,dxdt \to \int_0^T\int_\Omega (u'' - \Phi(\|\nabla_x u\|_2^2)\Delta_x u)v\,dxdt$$

lorsque $m \to +\infty$ pour tout $v \in L^{q+1}(0,T;H_0^1)$. Il reste à montrer que

$$\int_0^T\int_\Omega vg(u_m')dxdt \to \int_0^T\int_\Omega vg(u')dxdt \qquad \text{lorsque } m \to +\infty. \tag{48}$$

Il vient de (19) et le lemme de Fatou que $u'g(u') \in L^1(\Omega\times(0,T))$, D'autre part, puisque g est continue, alors on déduit de (44) que $g(u_m') \to g(u')$ presque partout dans $\Omega\times[0,T]$. D'après le lemme 2.3, on déduit que

$$g(u_m') \to g(u') \text{ dans } L^{(q+1)/q}(\Omega\times[0,T]) \text{ faible}^*$$

ce qui implique (48). De là

$$\int_0^T\int_\Omega (u'' - \Phi(\|\nabla_x u\|_2^2)\Delta_x u + g(u'))v\,dxdt = 0, \qquad \forall v \in L^{q+1}(0,T;H_0^1).$$

v) $\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2) > 0$ **pour** $0 \le t < +\infty$**:**

Montrons que $\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2) > 0$, $\forall t \ge 0$. Soit T un point tel que $\Phi(\|\nabla_x u(T)\|_2^2) = 0$, d'après l'estimation (21) on a

$$\left|\frac{\frac{d}{dt}\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)}{\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)}\right| \le \frac{\tau}{2}.$$

On fait une intégration sur $[t,T]$ pour $0 \le t \le T$, on obtient

$$\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)e^{-\tau/2(T-t)} \le \Phi(\|\nabla_x u(T)\|_2^2) \le \Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)e^{\tau/2(T-t)}$$

donc, on déduit que $\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2) = 0$ pour tout $t \in [0,T]$ ce qui contredit $\Phi(\|\nabla_x u_0\|_2^2) \ne 0$. Ainsi, on obtient $\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2) > 0$ pour tout $t \ge 0$.

vi) Unicité

L'unicité est assurée par un procédé classique en utilisant le fait que Φ est localement Lipschitzienne et g est monotone.

Preuve du théorème 3.2.

Posons

$$E(t) = \frac{\|u'(t)\|_2^2}{\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)} + \|\nabla_x u(t)\|_2^2.$$

En dérivant $E(t)$ par rapport à t nous obtenons

$$E'(t) \leq -\frac{1}{\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)}\left(2\tau + \frac{\frac{d}{dt}\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)}{\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)}\right)\|u'(t)\|_2^2 \tag{49}$$

$$\leq -\frac{3}{2}\tau\frac{\|u'(t)\|_2^2}{\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)},$$

la fonction $E(t)$ est décroissante et positive, alors il existe E_∞ tel que

$$E_\infty = \lim_{t\to+\infty} E(t),$$

$$F(t) = \frac{\|\nabla_x u'(t)\|_2^2}{\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)} + \|\Delta_x u(t)\|_2^2.$$

En dérivant $F(t)$ par rapport à t nous obtenons

$$F'(t) \leq -\frac{3}{2}\tau\frac{\|\nabla_x u'(t)\|_2^2}{\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)}, \tag{aa1}$$

donc $F(t)$ est décroissante et positive, alors il existe F_∞ tel que

$$F_\infty = \lim_{t\to\infty} F(t). \tag{aa2}$$

Dans la suite, nous aurons besoin du lemme suivant:

Lemme 4.1. *La fonction $L_u(t) = \Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)$ est globalement Lipschitzienne.*

Preuve: Puisque on a $\|\nabla_x u(t)\|_2^2 \leq E(0)$, pour tout $t \geq 0$, il s'ensuit que $\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)$ est bornée. D'après (5) on a aussi

$$\|\nabla_x u'(t)\|_2^2 \leq F(t)\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2) \leq C$$

pour tout $t \geq 0$. Comme Φ est localement Lipschitzienne, alors on a

$$\begin{aligned}
|\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2) - \Phi(\|\nabla_x u(s)\|_2^2)| &\leq C|\,\|\nabla_x u(t)\|_2^2 - \|\nabla_x u(s)\|_2^2| \\
&\leq |\,\|\nabla_x u(t)\|_2 - \|\nabla_x u(s)\|_2|(\|\nabla_x u(t)\|_2 + \|\nabla_x u(s)\|_2) \\
&\leq C\left\|\int_s^t \nabla_x u'(\sigma)d\sigma\right\|_2 \\
&\leq C\int_s^t \|\nabla_x u'(\sigma)\|_2 d\sigma \\
&\leq C|t-s|, \quad \forall t, s \geq 0,
\end{aligned}$$

par suite $\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)$ est globalement Lipschitzienne. □

D'autre part à l'aide de (aa1)–(aa2) on a:

$$\int_0^\infty \frac{\|\nabla_x u'(t)\|_2^2}{\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)}\, dt \leq -\frac{2}{3\tau}\int_0^\infty F'(t)dt = \frac{2}{3\tau}(F(0) - F_\infty).$$

Puisque $\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)$ est bornée d'ou le résultat (10).

Montrons maintenant que:

$$\|u'(t)\|_2 \to 0 \qquad \text{lorsque } t \to \infty.$$

En utilisant l'équation (P), on déduit que

$$\|u''(t)\|_{L^{(q+1)/q}} \leq C \qquad (C \text{ est une constante indépendante de } t)$$

alors par l'inégalité de Hölder et de Sobolev-Poincaré on obtient

$$\begin{aligned} |(u'(t), u''(t))| &\leq \|u'(t)\|_{L^{q+1}} \|u''(t)\|_{L^{(q+1)/q}} \\ &\leq C\|\nabla_x u'(t)\|_2 \|u''(t)\|_{L^{(q+1)/q}} \\ &\leq C \text{ (indépendant de } t). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité précédente avec (10) on obtient

$$|\|u'(t)\|_2^4 - \|u'(s)\|_2^4| \leq 4\int_s^t \|u'(\tau)\|_2^2 |(u'(\tau), u''(\tau))| d\tau \leq C\int_s^t \|u'(\tau)\|_2^2 d\tau \to 0$$

lorsque $s, t \to \infty$, ainsi, on a montré que $\|u'(t)\|_2$ converge vers une constante positive c_0 lorsque t tend vers $+\infty$. Utilisant aussi (10), on trouve $c_0 = 0$, d'ou le résultat (11).

Si $F_\infty = 0$, alors $\lim_{t\to\infty} \|\Delta_x u(t)\| = 0$ i.e $u(t) \to 0$ dans $H_0^1 \cap H^2$ lorsque $t \to \infty$ et $\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)$ est bornée on a $\lim_{t\to\infty} \|\nabla_x u'(t)\| = 0$ i.e $u'(t) \to 0$ dans H_0^1 lorsque $t \to \infty$ et en passant à la limite dans l'équation (P) on trouve $u''(t) \to 0$ dans $L^{(q+1)/q}$ lorsque $t \to \infty$.

Supposons que $E_\infty > 0$. D'après (49) on a

$$\int_0^\infty \frac{\|u'(t)\|_2^2}{\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)}\, dt \leq \frac{2}{3\tau}(E(0) - E_\infty),$$

comme $\Phi(\|\nabla_x(t)\|_2^2)$ est bornée on a

$$\int_0^\infty \|u'(t)\|_2^2 dt < +\infty.$$

On définit l'énergie du problème (P) par

$$H(t) = \frac{1}{2}\left(\|u'(t)\|_2^2 + \int_0^{\|\nabla_x u(t)\|_2^2} \Phi(s)ds\right).$$

En dérivant $H(t)$ par rapport à t, on obtient

$$H'(t) = -\int_\Omega u'(t)g(u'(t))dx.$$

Eu utilisant (1) et (2), on en déduit que $H(t)$ est décroissante et on a

$$H(t) \leq \frac{1}{2}\left(\|u_1\|_2^2 + \int_0^{\|\nabla_x u_0\|_2^2} \Phi(s)ds\right).$$

Pour étudier le comportement asymptotique, on a besoin des deux lemmes suivants

Lemme 4.2 ([2]). *On a*

$$\int_0^t \int_\Omega |u(t)g(u'(t))|dxds \leq c\sqrt{t} + ct^{1/(q+1)} = o(t), \qquad t \to +\infty.$$

Preuve: Comme g vérifie la condition (3) on a

$$|g(x)| \leq c_1|x| \qquad \text{pour } |x| \leq 1.$$

donc

$$\int_{|u'|\leq 1} |ug(u')|dx \leq c\int_\Omega (|u'|\,|g(u')|)^{1/2}|u|dx \leq c\left(\int_\Omega u'g(u')dx\right)^{1/2} \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Aussi, par (3) on a

$$\int_{|u'|>1} |ug(u')|dx \leq c\left(\int_\Omega u'g(u')dx\right)^{q/(q+1)} \|u\|_{L^{q+1}(\Omega)}.$$

Alors par l'inégalité Hölder on obtient

$$\int_0^t \int_\Omega |ug(u')|dxds \leq c\left(\int_0^t \int_\Omega u'g(u')dxds\right)^{1/2} \sqrt{t} \sup_{[0,t]} \|u(s)\|_{L^2(\Omega)}$$

$$+ ct^{1/(q+1)}\left(\int_0^t \int_\Omega u'g(u')dxds\right)^{q/(q+1)} \sup_{[0,t]} \|u(s)\|_{L^{q+1}(\Omega)}.$$

Utilisant les inégalités de Hölder, Sobolev et Poincaré on a

$$\|u(s)\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|u(s)\|_{L^{q+1}(\Omega)} \leq cE(s)^{1/2} \leq cE(0)^{1/2} \qquad \text{pour tout } s \geq 0.$$

Par ces estimations on en déduit que

$$\int_0^t \int_\Omega |ug(u')|dxds \leq c\sqrt{t} + ct^{1/(q+1)} = o(t), \qquad t \to +\infty.$$

Lemme 4.3. *La fonction $L_u(t) = \Phi(\|\nabla u(t)\|_2^2)$ admet une limite lorsque t tend vers $+\infty$.*

La preuve de ce lemme a été communiquée aux auteurs par le Professeur Kenji Nishihara. Premièrement, montrons que

$$\text{(k1)} \qquad M(\|\nabla u(t)\|_2^2) \to M_\infty \qquad \text{lorsque } t \to \infty$$

pour une certaine constante $M_\infty \geq 0$. En effet, on a

$$\begin{aligned} &M(\|\nabla_x u(t)\|_2^2) - M(\|\nabla u(s)\|_2^2) \\ &\quad = \int_s^t \frac{d}{d\tau} M(\|\nabla u(\tau)\|_2^2) d\tau \\ &\quad = 2\int_s^t \Phi(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\nabla u(\tau), \nabla u'(\tau)) d\tau \\ &\quad = -2\int_s^t \left[(u''(\tau), u'(\tau)) + \int_\Omega g(u'(x,\tau)) u'(x,\tau) dx \right] d\tau \\ &\quad \to 0 \qquad \text{lorsque } s, t \to \infty, \end{aligned}$$

car

$$\|u'(\tau)\|_2 \to 0 \qquad \text{lorsque } \tau \to \infty \qquad \text{et} \qquad \int g(u') u' \, dx \in L^1(0, \infty).$$

D'ici, on déduit que $M(\|\nabla u(t)\|_2^2)$ converge lorsque $t \to \infty$. Ensuite, puisque $\Phi(x) \geq 0$ et que $M(x) = \int_0^x \Phi(s) ds$ est une fonction positive et croissante, on peut définir

$$\begin{aligned} M^{-1}(M_\infty) &= \{x \mid M(x) = M_\infty\} \\ &= \begin{cases} [x_-, x_+], x_- < x_+ & \text{si } \Phi([x_-, x_+]) = 0 \text{ (Cas 1)} \\ x_\pm \text{(un seul point)} & \text{si } \Phi(x_\pm) \geq 0, \quad \Phi(x_\pm \pm \tilde{\varepsilon}) \neq 0 \ (0 < \tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon_0) \\ & \text{(Cas 2),} \end{cases} \end{aligned}$$

pour certain $\varepsilon_0 > 0$. Par (k1), pout tout $\varepsilon > 0$, il existe $T > 0$ tel que, pour $t > T$

$$M_\infty - \varepsilon \leq \int_0^{\|\nabla u(t)\|_2^2} \Phi(s) ds \leq M_\infty + \varepsilon.$$

Ainsi pour le premier cas, on a pour certain $\delta > 0$,

$$x_- - \delta \leq \|\nabla u(t)\|_2^2 \leq x_+ + \delta,$$

et par suite

$$0 \leq \Phi(\|\nabla u(t)\|_2^2) \leq \max\{\Phi(x) \mid x_- - \delta \leq x \leq x_+ + \delta\} \leq \varepsilon,$$

on prend $\delta > 0$ assez petit si nécessaire. Cela montre $\Phi(\|\nabla u(t)\|_2^2) \to 0$ lorsque $t \to \infty$. Pour le deuxième cas, pour $t > T$,

$$x_\pm - \delta \leq \|\nabla u(t)\|_2^2 \leq x_\pm + \delta$$

et

$$\min_{x_\pm-\delta\le x\le x_\pm+\delta} \Phi(x) \le \Phi(\|\nabla u(t)\|_2^2) \le \max_{x_\pm-\delta\le x\le x_\pm+\delta} \Phi(x),$$

ce qui montre que $\Phi(\|\nabla u(t)\|_2^2) \to \Phi(x_\pm) = \Phi(M^{-1}(M_\infty))$ lorsque $t \to \infty$. Ainsi, on a montré que dans tous les cas $\Phi(\|\nabla u(t)\|_2^2)$ converge lorsque $t \to \infty$. □

Posons

$$\Psi(t) = \int_\Omega uu' \, dx.$$

En dérivant $\Psi(t)$ par rapport à t, nous obtenons

$$\begin{aligned}\Psi(t) - \Psi(0) &= \int_0^t [2\|u'(s)\|_2^2 - (\|u'(s)\|_2^2 + \Phi(\|\nabla_x u(s)\|_2^2)\|\nabla_x u(s)\|_2^2)] \\ &\quad - \int_0^t \int_\Omega u(s) g(u'(s)) dx ds \\ &= 2\int_0^t \|u'(s)\|_2^2 ds - \int_0^t \Phi(\|\nabla_x u(s)\|_2^2)\left(\frac{\|u'(s)\|_2^2}{\Phi(\|\nabla_x u(s)\|_2^2)} + \|\nabla_x u(s)\|_2^2\right) ds \\ &\quad - \int_0^t \int_\Omega u(s) g(u'(s)) dx ds,\end{aligned}$$

donc

$$\Psi(t) - \Psi(0) \le -E_\infty \int_0^t \Phi(\|\nabla_x u(s)\|_2^2) ds + o(t),$$

supposons $\int_0^\infty \Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2) dt = +\infty$ et $\lim_{t\to\infty} \Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2) \ne 0$, alors on a

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t \Phi(\|\nabla_x u(s)\|_2^2) ds}{t} = \lim_{t\to+\infty} \Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)$$

ceci est vraie d'après la régle de l'Hôpital et $\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)$ est continue et localement Lipschitzienne. Par conséquent on obtient

$$\lim_{t\to\infty}(\Psi(t) - \Psi(0)) \le \lim_{t\to\infty} t\left(-E_\infty \frac{\int_0^t \Phi(\|\nabla_x u(s)\|_2^2) ds}{t} + \varepsilon(t)\right) = -\infty$$

car $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0$. Ainsi on a $\lim_{t\to\infty} \Psi(t) = -\infty$, mais ceci est impossible, car

$$|\Psi(t)| \le \|u(t)\|_2 \|u'(t)\|_2 \le cE(0).$$

Ainsi

$$\int_0^\infty \Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)ds < +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{t\to\infty} \Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2) = 0.$$

Puisque $\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)$ est continue Lipschitzienne et si $\int_0^\infty \Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)dt < +\infty$ alors on a $\lim_{t\to\infty} \Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2) = 0$. Donc dans tous les cas on a

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2) = 0.$$

Preuve de la remarque 3.1 a).

Si $\Phi(r) \geq \nu > 0$ pour tout $0 \leq r \mathscr{E}(0)$, alors on a pour $E_\infty > 0$:

$$\Psi(t) - \Psi(0) \leq -E_\infty \nu t + o(t) \to -\infty \text{ lorsque } t \to +\infty$$

ainsi $\lim_{t\to+\infty} \Psi = -\infty$, mais ceci est impossible, donc $E_\infty = 0$.

Preuve du corollaire 3.1.

Puisque $E(0) \leq r_0$ alors $E(t) \leq r_0$, donc

$$\|\nabla_x u(t)\|_2^2 \leq r_0. \tag{50}$$

Si $E_\infty = 0$, alors

$$u'(t) \to 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ et } u(t) \to 0 \text{ dans } H_0^1(\Omega)$$

lorsque $t \to +\infty$. Aussi on a

$$\|\nabla_x u'(t)\|_2^2 \leq F(0)\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2). \tag{51}$$

Le passage à la limite dans l'inégalité précédente lorsque $t \to \infty$ nous donne

$$\lim_{t\to\infty} \|\nabla_x u'(t)\|_2^2 \leq F(0)\Phi(0) = 0,$$

donc

$$u'(t) \to 0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \qquad \text{lorsque } t \to +\infty,$$

ainsi, on en conclut

$$(u(t), u'(t), u''(t)) \to (0,0,0) \text{ dans } H_0^1 \times H_0^1 \times L^{(q+1)/q}.$$

Si $E_\infty > 0$, alors d'après le théorème 3.2 on a $\lim_{t\to\infty} \Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2) = 0$, d'après (50) on conclut que

$$\lim_{t\to\infty} \|\nabla_x u(t)\|_2^2 = 0,$$

donc

$$u \to 0 \text{ dans } H_0^1 \qquad \text{lorsque } t \to +\infty,$$

on tire aussi de l'inégalité (51) que

$$u'(t) \to 0 \text{ dans } H_0^1 \qquad \text{lorsque } t \to +\infty,$$

le passage à la limite dans la première équation de (P) nous permet de conclure

$$u''(t) \to 0 \text{ dans } L^{(q+1)/q}(\Omega) \qquad \text{lorsque } t \to +\infty.$$

Preuve du corollaire 3.2.

Soit $g(x) = \tau x$, puisque F_∞ existe, alors: Si $F_\infty = 0$, alors

$$u(t) \to 0 \text{ dans } H_0^1 \cap H^2 \qquad \text{lorsque } t \to +\infty.$$

Comme $\Phi(\|\nabla_x u\|_2^2)$ est bornée, on obtient

$$u'(t) \to 0 \text{ dans } H_0^1 \qquad \text{lorsque } t \to +\infty,$$

en passant à la limite dans l'équation (P), on obtient

$$u'' \to 0 \text{ dans } L^{(q+1)/q}(\Omega) \qquad \text{lorsque } t \to +\infty.$$

Si $F_\infty > 0$, posons

$$\tilde{\Psi}(t) = \int_\Omega -\Delta_x u u' \, dx.$$

En dérivant $\tilde{\Psi}(t)$ par rapport à t, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}'(t) &= 2\|\nabla_x u'(t)\|_2^2 - (\|\nabla_x u'(t)\|_2^2 + \Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)\|\Delta_x u(t)\|_2^2) \\
&\quad + \tau \int_\Omega \Delta_x u(t) u'(t) dx \\
&= 2\|\nabla_x u'(t)\|_2^2 - \Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)\left(\frac{\|\nabla_x u'(t)\|_2^2}{\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)} + \|\Delta_x u(t)\|_2^2\right) \\
&\quad - \tau \int_\Omega \nabla_x u(t) \nabla_x u'(t) dx.
\end{aligned}$$

On intégre cette dernière expression, on obtient

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}(t) - \tilde{\Psi}(0) &= 2\int_0^t \|\nabla_x u'(s)\|_2^2 ds \\
&\quad - \int_0^t \Phi(\|\nabla_x u(s)\|_2^2)\left(\frac{\|\nabla_x u'(s)\|_2^2}{\Phi(\|\nabla_x u(s)\|_2^2)} + \|\Delta_x u(s)\|_2^2\right) ds \\
&\quad - \frac{\tau}{2}\|\nabla_x u(t)\|_2^2 + \frac{\tau}{2}\|\nabla_x u_0\|_2^2 \\
&\leq C + 2\int_0^t \|\nabla_x u'(s)\|_2^2 ds - F_\infty \int_0^t \Phi(\|\nabla_x u(s)\|_2^2) ds.
\end{aligned}$$

Supposons $\int_0^\infty \Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2) dt = +\infty$ alors on a d'après (10):

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\Psi}(t) \leq \lim_{t\to\infty}\left(C - F_\infty \int_0^t \Phi(\|\nabla_x u(s)\|_2^2)ds\right)$$

$$= -\infty$$

donc $\lim_{t\to+\infty} \tilde{\Psi} = -\infty$, mais ceci est impossible, car

$$|\tilde{\Psi}(t)| \leq \|\Delta_x u(t)\| \, \|u'(t)\| \leq cF(0) \qquad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Ainsi on a

$$\int_0^\infty \Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)dt < +\infty. \tag{52}$$

comme $\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)$ est globalement Lipschitzienne on en déduit que

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2) = 0 \qquad \text{lorsque } t \to +\infty.$$

Puisque $\|\nabla_x u'(t)\|_2^2 \leq \Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)F(0)$, alors on obtient

$$u'(t) \to 0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \qquad \text{lorsque } t \to +\infty.$$

On montre que $u(t) \to u_\infty$ dans $H_0^1 \cap H^2$ lorsque $t \to \infty$, pour cela on considère le problème suivant

$$\begin{cases} v''(t) - \Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)\Delta_x v(t) + g(v'(t)) = 0 \text{ dans } \Omega \times [0, +\infty[, \\ v = 0 \text{ sur } \Gamma \times [0, +\infty[, \\ v(x,0) = v_0(x), \qquad v'(x,0) = v_1(x) \text{ sur } \Omega, \end{cases} \tag{53}$$

où $u(t)$ est la solution du problème (P) et $(v_0, v_1) \in D((-\Delta_x)^2) \times D((-\Delta_x)^{3/2})$. Introduisons la fonction

$$\tilde{F}(t) = \frac{\|(-\Delta_x)^{3/2} v'(t)\|_2^2}{\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)} + \|\Delta_x^2 v(t)\|_2^2.$$

Il est facile de vérifier que $\tilde{F}(t)$ est décroissante, ainsi on a

$$\|\Delta_x^2 u(t)\|_2^2 \leq \tilde{F}(0) \qquad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Considérons la fonction

$$G(t) = \frac{\|\Delta_x v'(t)\|_2}{\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)},$$

alors on a

$$(G^2)'(t) \leq -G(t)\left\{2\left(\tau + \frac{\frac{d}{dt}\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)}{\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)}\right) G(t) - 2\|\Delta_x^2 v(t)\|\right\}$$

$$\leq -G(t)\left\{\tau G(t) - 2\sqrt{\tilde{F}(0)}\right\},$$

on peut alors appliquer le lemme 2.1 avec $f = G^2$ pour en déduire que

$$G(t) \leq \max\left\{ G(0), \frac{2}{\tau}\sqrt{\tilde{F}(0)} \right\},$$

par (52) on obtient

$$\int_0^\infty \|\Delta_x v'(t)\| dt < +\infty$$

et donc $\Delta_x v(t)$ admet une limite lorsque $t \to \infty$.

On montre qu'on a le même résultat lorsque $(u_0, u_1) \in H_0^1 \cap H^2 \times H_0^1$.

Enfin, considérons une suite $\{(v_{0n}), (v_{1n})\} \subseteq D((-\Delta_x)^2) \times D((-\Delta)^{3/2})$ qui converge vers (u_0, u_1) dans $H_0^1 \cap H^2 \times H_0^1$. Soit $\{v_n\}$ les solutions correspondantes de l'équation (53), posons $w_n = u - v_n$. Ainsi w_n est solution de l'équation

$$w_n''(t) - \Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)\Delta_x w_n(t) + g(u'(t)) - g(v_n'(t)) = 0,$$

$$w_n(0) = u_0 - v_{0n}, \qquad w_n'(0) = u_1 - v_{1n}.$$

Posons

$$\hat{F}(t) = \frac{\|\nabla_x w_n'(t)\|_2^2}{\Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2)} + \|\Delta_x w_n(t)\|_2^2.$$

En dérivant $\hat{F}(t)$ par rapport à t on conclut

$$\|\Delta_x w_n(t)\|_2^2 \leq \hat{F}(t)$$

$$\leq \frac{\|\nabla_x(v_{1,n} - u_1)\|_2^2}{\Phi(\|\nabla_x u_0\|_2^2)} + \|\Delta_x(v_{0,n} - u_0)\|_2^2.$$

Ceci prouve que $\{\Delta_x v_n\} \to \Delta_x u$ uniformément dans $[0, +\infty[$. Puisque $\Delta_x v_n$ admet une limite lorsque $t \to \infty$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors nécessairement $\Delta_x u(t)$ admet une limite lorsque $t \to \infty$.

Remarque 4.1. a) La preuve donnée ici pour le corollaire 3.2 est plus simple que celle utilisée dans [13] et nous permet de voir pourquoi lorsque g est nonlinéaire, il n'est pas possible de déduire que $\int_0^\infty \Phi(\|\nabla_x u\|_2^2) dt < +\infty$ et par conséquent il n'est pas évident de démontrer l'existence de u_∞ dans $H^2 \cap H_0^1$ et même dans H_0^1.

b) Il serait fort intéressant d'étudier le cas réellement dégénéré, mais dans les espaces de Sobolev, déjà pour l'existence locale il y a perte de dérivation de la solution locale (voir [36] et [37]) ce qui rend difficile d'établir l'existence globale, mais comme même on peut traiter l'existence globale des solutions

analytiques et par la suite étudier le comportement asymptotique de la solution, en effet si on considère le problème (P) avec $g(x) = \tau x$, on suppose que Φ vérifie la condition suivante

$$\int_0^{+\infty} \Phi(s)ds = +\infty$$

on élimine la condition (6), alors on a le résultat suivant

Théorème 4.1. *Supposons que les données initiales u_0 et u_1 sont Δ-analytiques, alors il existe une solution globale unique du problème* (P) *deux fois continûment différentiable par rapport au temps et analytique par rapport aux variables spaciales, et on a*

(d1) $$\|u'(t)\|_2 \to 0 \qquad \textit{lorsque } t \to \infty,$$

(d2) $$\lim_{t\to\infty} \Phi(\|\nabla_x u(t)\|_2^2) \textit{ existe.}$$

La preuve de l'existence globale est similaire à celle utilisée dans [7], pour la preuve de (d1) et (d2), on procède comme dans la preuve du théorème 3.2.

Nous pensons qu'il est possible d'obtenir plus de résultats, on a l'exemple suivant [10]:

$$\begin{cases} u'' - \Phi(\|u_x\|_2^2)u_{xx} + u' = 0 \text{ dans } [0, 2\pi] \times [1+\sqrt{2}, +\infty[, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \times [1+\sqrt{2}, +\infty[, \\ u(x, 1+\sqrt{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{1/(1+\sqrt{2})} \sin x, \\ u'(x, 1+\sqrt{2}) = \dfrac{1}{(1+\sqrt{2})^2\sqrt{\pi}} e^{1/(1+\sqrt{2})} \sin x \text{ sur } [0, 2\pi], \end{cases}$$

où Φ est définie comme suit

$$\Phi(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{16}(\log s)^2(4 - \log s - (\log s)^2) \text{ si } 1 \le s \le e^{1/(1+\sqrt{2})}, \\ 0 \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

Alors la solution explicite est sous la forme

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{1/t} \sin x,$$

on a

$$\|u_x(t)\|_2^2 = e^{1/t} \to 1 \qquad \text{lorsque } t \to \infty,$$

$$\Phi(\|u_x(t)\|_2^2) = \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^3} - \frac{1}{t^4} \qquad \text{pour } t \ge 1 + \sqrt{2}.$$

References

[1] Aassila, M., Global existence and decay properties of solutions to degenerate wave equations with dissipative terms, Bulletin of the Australian Math. Soc., **60** (1999), 1–10.

[2] Aassila, M., A new approach of strong stabilization of distributed systems, Differential and Integral Equations, **11** (1998)-2, 369–376.

[3] Aassila, M., Asymptoyic behavior of solutions to a quasilinear hyperbolic equation with nonlinear damping, EJQTDE (1998)-7, 1–12.

[4] Arosio, A., Linear second order differential equations in Hilbert spaces: The Cauchy problem and asymptotic behavior for large time, Archiv for Rational Mechanics and Analysis, **86** (1984)-2, 147–180.

[5] Arosio, A., Averaged evolution equations. The Kirchhoff string and its treatement in scales of Banach spaces, Proceeding of the *"2nd workshop on functional-analytic methods in complex analysis"* (Trieste, 1993), World Scientific, Singapore.

[6] Arosio, A. and Garavaldi, S., On the mildly degenerate Kirchhoff String, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **14** (1991), 177–195.

[7] Arosio, A., Spagnolo, S., Global solutions to the Cauchy problem for a nonlinear hyperbolic equation, in *'Nonlinear P. D. E. and Their Appliquation'*. Vol. VI, Collège de France, Seminar, Research Notes Math. Vol. 109, Eds H. Brézis and J. L. Lions, Pitman, Boston, (1984) p. 1–26.

[8] Crippa, H. R., On local solutions of some mildly degenerate hyperbolic equations, Nonlinear Analysis, **21** (1993)-8, 565–574.

[9] Ancona, P. D', Spagnolo, S., Global solvability for the degenerate Kirchhoff equation with real analytic data, Invent. Math., **108** (1992)-2, 247–262.

[10] Dix, J. G., Decay of solutions of a degenerate hyperbolic equation. Electronic Journal of Differential Equations, **1998** (1998)-21, 1–10.

[11] Dixmier, J., *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien.* Gauthier-Villars, Paris 1957.

[12] Ebihara, Y., Medeiros, L. A. and Miranda, M. M., Local solutions for nonlinear degenerate hyperbolic equation, Nonlinear Analysis, **10** (1986)-1, 27–40.

[13] Ghisi, M. and Gobbino, M., Global existence for mildly degenerate dissipative hyperbolic equation of Kirchhoff type, Preprint Dip. Mat. Univ. Pisa (December 1997).

[14] Gourdin, D., Mechab, M., Problème de Goursat non linéaire dans les classes de Gevrey, pour des équations de Kirchhoff généralisées, J. Math. Pures Appl., **75** (1996), 569–593.

[15] Hosoya, M. and Yamada, Y., On some nonlinear wave equations II: global existence and energy decay of solutions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **38** (1991), 239–250.

[16] Ikehata, R. and Okazawa, N., A class of second order quasilinear evolution equations, Journal of Differential equations, **114** (1994), 106–131.

[17] Kirchhoff, G., *Vorlesungen über Mechanik*, Leipzig, Teubner, 1883.

[18] Lions, J. L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires,* Dunod, Paris, 1969.

[19] Lions, J. L., On some questions in boundary value problem of mathematical physics, in Contemporary Developments in Cont. Mech. and P. D. E, G. M. de la Penha, L. A. Medeiros eds, (1978), 284–346.

[20] Lions, J. L. and Magenes, E., Non homogenous boundary value problems and applications, Dunod, **1** (1970), Springer (1972).

[21] Matos, M. P., Mathematical analysis of the nonlinear model for the vibrations of a string, Nonlinear Analysis, **17** (1991)-12, 1125–1137.

[22] Matos, M. P. and Pereira, D. C., On a hyperbolic equation with strong damping, Funkcialaj Ekvacioj, **34** (1991), 303–311.

[23] Matsuyama, T., Quasilinear hyperbolic-hyperbolic singular perturbations with nonmonotone nonlinearity, Nonlinear Analysis, **35** (1999)-5, 589–607.

[24] Medeiros, L. A., On a new class of nonlinear wave equations, J. Math. Anal. Appl., **69** (1979)-1, 252–262.

[25] Menzala, G. P., On classical solutions of a quasilinear hyperbolic equation, Nonlinear Analysis, **3** (1979)-5, 613–627.

[26] Medeiros, L. A. and Miranda, M., Solutions for the equations of nonlinear vibrations in Sobolev spaces of fractionary order, Computational Applied Math., **6** (1987), 257–276.

[27] Mizumachi, T., Time decay of solutions to degenerate Kirchhoff type equation, Nonlinear Analysis, **33** (1998), 235–252.

[28] Nakao, M., A difference inequality and its applications to nonlinear evolution equations, J. Math. Soc. Japan, **30** (1978), 747–762.

[29] Nishihara, K. and Yamada, Y., On global solutions of some degenerate quasilinear hyperbolic equations with dissipative terms, Funkcialaj Ekvacioj, **33** (1990), 151–159.

[30] Ono, K., Global existence and decay properties of solutions of some mildly degenerate nonlinear dissipative Kirchhoff strings, Funkcialaj Ekvacioj, **40** (1997), 255–270.

[31] Pohozaev, S. I., On a class of quasilinear hyperbolic equations, Math. Sbornik, **96** (1975)-1, 145–158.

[32] Riviera Rodriguez, P. H., On local strong solution of a nonlinear partial differential equation, Appl. Anal., **10**, (1980)-2, 93–104.

[33] Spagnolo, S., The Cauchy problem for Kirchhoff equations, Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico Di Milano, **LXII** (1992), 17–51.

[34] Temam, R., *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics.* Applied Mathematical Sciences, **68**, Springer-Verlag, New York, 1988.

[35] Tsutsumi, M., On solutions of some semilinear differential equations in a Hilbert space, Math. Japonica, **17** (1972), 173–193.

[36] Yamada, Y., Some nonlinear degenerate wave equations, Nonlinear Anal., **11** (1987), 1155–1168.

[37] Yamazaki, T., On local solution of some quasilinear degenerate hyperbolic equations, Funkcialaj Ekvacioj, **31** (1988), 439–457.

nuna adreso:

Mohammed Aassila
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université de Strasbourg
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg
France
E-mail: aassila@math.u-strasbg.fr

Abbes Benaissa
Institut des Sciences Exactes
Université Djillali Liabes
B. P. 89, Sidi Bel Abbes 22000
Algérie

(Ricevita la 27-an de marto, 2000)
(Reviziita la 8-an de novembro, 2000)