Funkcialaj Ekvacioj, 44 (2001) 201–217

The Proof of the Painlevé Property by Masuo Hukuhara

By

Kazuo OKAMOTO and Kyoichi TAKANO
(The University of Tokyo and Kobe University, Japan)

§0. Introduction

In the summer semester of the year 1960, Masuo Hukuhara, a professor of the University of Tokyo, gave a series of lectures for graduate students of mathematics of the university and made lecture notes in Esperanto for the students who were present. The subjects were on Painlevé equations, Garnier equations and Schlesinger equations.

In the lecture notes, Hukuhara completed the proof by Paul Painlevé ([3], [4]) of the property that *Painlevé equations have neither movable branch points nor movable essential singular points*, which is now called the *Painlevé property*. However he has not published his proof in any form, saying that it would have been an easy exercise for Paul Painlevé.

Masahiro Iwano, a former student of Hukuhara, attended this series of lectures, and he also gave a series of lectures in 1971 at the University of Tokyo, using Hukuhara's lecture notes. Young Japanese mathematicians, interested in the theory of nonlinear differential equations, on this occasion studied the rigorous proof of the Painlevé property by Hukuhara. Iwano introduced Hukuhara's proof of the Painlevé property for the sixth Painlevé equation as well as the first one. After this, the proof given by Hukuhara was then familiar to Japanese mathematicians who were interested in the Painlevé equations, although there were only a few such people.

The idea of Hukuhara concerning the sixth Painlevé equation is remarkable, and it inspired the first author to construct a space of initial conditions and to introduce the Hamiltonian structure for each Painlevé equation. In fact, he assumed the Painlevé property to be a well known fact and cited the lectures notes of Hukuhara in his paper on the foliations associated with the Painlevé equations ([2]) and also the lecture notes of M. Iwano have been cited in [1].

Now there are many people who are interested in Painlevé equations and some of them seem to think that rigorous proof has not yet been obtained. Therefore we think it is meaningful to publish the part of Hukuhara's lecture notes in which the Painlevé property is dealt with.

In the following two sections, a copy of part of Hukuhara's lecture notes is given under his permission, in which nothing is changed except the addition of a figure and references. It is written in Esperanto, however one can easily read it consulting the following list if necessary.

ankaŭ (also), aŭ (or), ajn (any), al (to), anstataŭigi (replace),
ĉar (because), ĉe (at), ĉirkaŭ (around),
du (two), dua (second), dum (while),
el (of),
ĝi (it), ĝia (its), ĝin (it),
ia (some), ili (they), ilia (their),
kaj (and), kazo (case), ke (that, *conj.*), kiam (when), kie (where), kiel (as),
kies (whose), kiu (which), kun (with),
jena (following),
laŭ (by), li (he), lia (his),
malgranda (small), meti (put), mi (I),
ne (not), ni (we), nia (our), nin (us), nun (now),
ol (than), oni (one, *pron.*),
plej (most), pli (more), plie (moreover), pri (about),
se (if), sed (but),
tiam (then), trovi (find), sin trovi (be found), tuta (whole),
unu (one, a), unua (first), unue (firstly),

§1. Meromorfeco de la solvo de (F) $y'' = 6y^2 + x$

1. Se x_0 estas poluso de ia solvo, oni havas la ekspansion

$$y = (x - x_0)^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \qquad (c_0 = 1). \tag{1}$$

La koeficientoj devas havi la jenajn valorojn

$$\begin{gathered} c_1 = c_2 = c_3 = 0, \quad c_4 = -\frac{x_0}{10}, \quad c_5 = -\frac{1}{6}, \\ c_6 = h, \quad c_7 = 0, \quad c_8 = \frac{x_0^2}{300}, \ldots, \end{gathered} \tag{1$'$}$$

kie h estas arbitra konstanto. Anstataŭigante x_0 en la koeficientoj per $x - (x - x_0)$ kaj reordigante laŭ la potencoj de $x - x_0$, ni ricevas la ekspansion

$$y = (x - x_0)^{-2} - \frac{x}{10}(x - x_0)^2 - \frac{1}{15}(x - x_0)^3 + h(x - x_0)^4 + \frac{x^2}{300}(x - x_0)^6 + \cdots$$

Se ni signas per z la branĉon de $y^{-1/2}$ kies ekspansio laŭ la potencoj de $x-x_0$ havas la formon

$$z=(x-x_0)+\cdots,$$

ni povas konsideri la deriviton y' kiel funkcion de z kaj ni ricevas la ekspansion

$$y'=-\frac{2}{z^3}-\frac{xz}{2}-\frac{z^2}{2}+7hz^3+\frac{19z^5x^2}{400}+\cdots$$

Metu

$$y=\frac{1}{z^2},\qquad y'=-\frac{2}{z^3}-\frac{xz}{2}-\frac{z^2}{2}+uz^3. \tag{2}$$

La ekvacio (F) ŝanĝiĝas al la diferenciala sistemo:

$$z'=1+\frac{xz^4}{4}+\frac{z^5}{4}-\frac{uz^6}{2},$$
$$u'=\frac{x^2z}{8}+\frac{3xz^2}{8}-\left(xu-\frac{1}{4}\right)z^3-\frac{5uz^4}{4}+\frac{3u^2z^5}{2}.$$

Tiu ĉi sistemo posedas unu kaj nur unu regulan solvon kiu plenumas la iniciatan kondiĉon: $z=0$, $u=u_0$ por $x=x_0$, kie u_0 povas reprezenti ajnan valoron. Portante tiun solvon en la rilatojn (2), ni ricevas unu solvon de (F) por kiu x_0 estas efective la duaorda poluso. Oni havas do la ekspansion (1) kies koeficientoj estas donitaj de $(1)'$. Oni povas facile certigi la rilaton $u_0=7h$.

2. Multiplikante

$$y'-\frac{2}{z^3}-\frac{xz}{2}+\frac{z^2}{2}+uz^3$$

al la dua de la rilatoj (2), oni ricevas la rilaton

$$y'^2-4y^3-2xy+\frac{y'}{y}+4u-\frac{x^2}{4y}+\left(\frac{1}{4}+xu\right)\frac{1}{y^2}-\frac{u^2}{y^3}=0. \tag{4}$$

Metu

$$U=y'^2-4y^3-2xy+\frac{y'}{y} \tag{5}$$

aŭ

$$U=-4u+\frac{x^2}{4y}-\left(\frac{1}{4}+xu\right)\frac{1}{y^2}+\frac{u^2}{y^3}. \tag{5$'$}$$

Kiam ni donas al x kaj U ajnajn valorojn superatajn je modula de ia nombro M, unu el la du valoroj u kiuj plenumas $(5)'$ estas superata je modulo de ia nombro kiu dependas de M sed ne de y.

Tion rimarkinte, ni konsideras ajnan solvon y de (F). y_0 kaj y_0' estu la valoroj de y kaj y' ĉe x_0. La rilatoj (2) determinas du parojn de valoroj (z_0, u_0), $(\bar{z}_0, \bar{u}_0)$, al kiuj respondas nur nun valoro U_0 de U pere de $(5)'$, ĉar oni havas (5) por $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0'$, $U = U_0$. Se do ni supozas ke x_0 kaj U_0 estas superataj je modulo de ia nombro, ni povas supozi ke u_0 ankaŭ estas superata je modulo de ia nombro. Se oni supozas plie ke y_0 restas pli granda je modulo ol ia pozitiva nombro, z_0 restas pli malgranda je modulo ol ia nombro. Tiu rimarko nin kondukas al la jena konkludo:

y estu ia solvo de (F) *regula sur ia kurbo C kies unu ekstremo estas a. Se ekzistas sur C unu punktovico $\{x_n\}$ konverĝanta al a kaj sur kiu U kaj $1/y$ estas superataj je modulo de ia nombro, a estas regula punkto aŭ poluso de la solvo y.*

Ĉar oni povas supozi ke z kaj u restas sur la punktovico pli malgrandaj je modulo ol ia nombro, ili estas do regulaj ĉe a laŭ la unikecteoremo de Painlevé. Se z nuliĝas ĉe a, a estas poluso de y. Se ne, y estas regula ĉe a.

3. Se ia solvo y estas superumata sur ia finitlonga kurbo C kies unu ekstremo estas a, ĝia derivito y' ankaŭ estas superumata sur la kurbo C. y estas do regula ĉe a laŭ la unikecteoremo.

Konsideru nun la kazon kie y estas malsuperumata (t.e. $1/y$ estas superumata) sur C. Oni povas facile certigi la rilaton

$$y' = y^3 U' + yU - x.$$

Portant tiun esprimon en la rilaton (5), ni ricevas

$$\left(U' + \frac{U}{y^2} + \frac{x}{y^3}\right)^2 + \frac{1}{y^4}\left(U' + \frac{U}{y^2} + \frac{x}{y^3}\right) - \frac{U}{y^6} - \frac{4}{y^3} - \frac{2x}{y^5} = 0$$

de kio rezultas unu neegalĵo de la formo

$$|U'| \leq A|U| + B$$

sur la kurbo C. U estas do superumata sur C. La rezulto de la paragrafo 2 montras ke en la nuna kazo la solvo estas meromorfa ĉe a.

4. Nun mi povas montri la meromorfeco de la solvo. Supozu la kontraŭecon kaj konsideru la cirklon K interne de kiu unu solvo y estas meromorfa sed sur kies cirkonferenco sin trovas unu transcenda singula punkto a. Sur la radio Γ (aŭ pli ĝenerale sur ia finitlonga kurbo sin trovanta interne de la cirklo) kies ekstremo estas a, y ne povas esti superumata nek malsuperumata. Ekzistas do sur Γ unu punktovico sur kiu y estas superumata. Sur la sama punktovico y' ne povus esti superumata, ĉar se ne y estus regula ĉe a kontraŭe de nia hipotezo. Ekzistas do sur la radio Γ unu punkto x_1 ĉe kiu la valoro y_1 de y estas pli malgranda je modulo ol 1 dum la valoro y_1' de y' estas pli granda je modulo ol ia nombro $8M$, kiun oni povas supozi tiom granda kiom oni volas. Oni povas ankaŭ supozi ke x_1 estas tiom proksima de a kiom oni volas. Desegnu ĉirkaŭ x_1 unu cirklon C_1 interne de kiu ni supozas $|y| \leq 10$. Integrante la ekvacion (F), oni ricevas

$$|y' - y_1'| \leq (600 + R)|x - x_1|,$$

$$|y - y_1 - y_1'(x - x_1)| \leq (300 + R/2)|x - x_1|^2,$$

kie R estas la plej granda de la distancoj de 0 al la punktoj de K. La radio de C_1 estu egala al $8/|y_1'|$. Tiam oni havas

$$|y| \leq 9 + (300 + R/2)/M^2.$$

Se do M^2 estas pli granda ol $300 + R/2$, oni havas vere la neegalajon $|y| < 10$ en la cirklo C_1 kaj C_1 sin trovas komplete interne de K, ĉar se ne, y estus superumata sur la radio Γ. La cirklo renkontas do la segmenton $\overline{x_1 a}$ ĉe unu punkto x_1', kaj oni havas

$$|y| \geq |y_1'(x - x_1)| - |y_1| - (300 + R/2)/M^2 > 6$$

por $x = x_1'$. Sur la segmento $\overline{x_1' a}$ sin trovas ankoraŭ punktoj x ĉe kiuj la valoroj y estas je modulo maksimume egala al 1 dum la valoroj y' estas je modulo minimume egala al $8M$. El tiuj punktoj ekzistas la plej proksima de x_1'. Ni ĝin signas per x_2 kaj desegnas ĉirkaŭ ĝi la cirklon C_2 kun la radio $8/|y_2'|$, kie y_2' estas la valoro y' ĉe x_2. C_2 sin trovas interne de K. Ĝi renkontas do la segmenton $\overline{x_2 a}$ ĉe unu punkto x_2'. Sur la segmento $\overline{x_2' a}$ sin trovas ankoraŭ punktoj x ĉe kiuj la valoroj estas je modulo maksimume egala al 1 dum la valoroj y' estas je modulo minimume egala al $8M$. El tiuj punktoj ekzistas la plej proksima de x_2'. Ni ĝin signas per x_3, ktp. Tiel ni ricevas punktovicon $\{x_k\}$. Ni desegnas ĉirkaŭ x_k la cirklon C_k kun la radio $8/|y_k'|$ kaj la cirklon Γ_k kun la radio $3/|y_k'|$. Interne de Γ_k oni havas

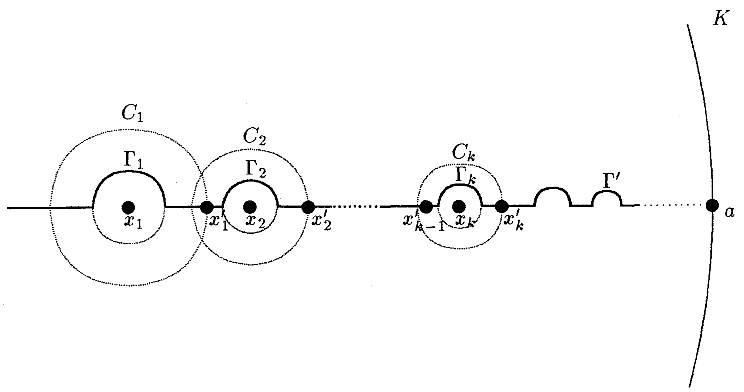
$$|y| \leq |y_k'(x - x_k)| + |y_k| + (300 + R/2)|x - x_k|^2 < 5$$

C_k renkontas la segmenton $\overline{x_k a}$ ĉe unu punkto x_k', kie oni havas $|y| > 6$. Do Γ_{k-1} kaj Γ_k sin trovas eksterne unu de la alia kaj la du punktovicoj $\{x_k\}$ kaj $\{x_k'\}$ konverĝas al la sama punkto, kiu devas esti transcenda punkto de y. Do tiuj du punktovicoj konverĝas al a.

Ni signas per Γ' la radion Γ kie la sur Γ kuŝanta diametro de ĉiu Γ_k estas anstataŭata de la respondanta duoncirkonferenco. Γ' estas ankaŭ finitlonga. Sur la cirkonferencoj Γ_k oni havas

$$|y| \geq |y_k'(x - x_k)| - |y_k| - (300 + R/2)/M^2 > 1.$$

Konsideru ian ajn punkton x de Γ' kuŝantan inter Γ_{k-1} kaj Γ_k. Oni ne povas havi samtempe la neegalaĵojn $|y| \leq 1$, $|y'| \geq 8M$. Do la neegalaĵo $|y| \leq 1$ kondukas $|y'| < 8M$. Pro la hipotezo ke a estas la transcenda punkto, povas ekzisti sur Γ' neniu punktovico konverĝanta al a kaj kie y kaj y' estas superumataj. Oni havas do $|y| \geq 1$ por $x \in \Gamma'$ sin trovanta sufiĉe proksima de a. La rezulto de la paragrafo 3 montras ke y estas meromorfa ankaŭ ĉe a, kontraŭe de nia hipotezo. La meromorfeco de y en la tuta ebeno estas do establita.



5. Nun ni serĉas unu esprimon de la solvo kiel kvocienton de du entjeraj funkcioj.

$$\eta = -\int y(x)dx$$

estas meromorfa funkcio kies ĉiu poluso estas unuaorda kun la restajo 1.

$$\zeta = \exp \int \eta \, dx$$

estas do entjera funkcio kies nuloj estas polusoj de y. Simpla kalkulo kondukas nin al la diferencialaj ekvacioj

$$\eta''' + 6\eta'^2 + x = 0, \qquad \zeta' = \eta\zeta.$$

La unua ekvacio multiplitita de $2\eta''$ estas tuj integrebla kaj oni trovas

$$\eta''^2 + 4\eta'^3 + 2(x\eta' - \eta) = \text{konst.}$$

Oni povas supozi la konstanton nul sen perdi la ĝeneralecon. Ni havas do

$$y = \frac{\zeta'^2 - \zeta\zeta''}{\zeta^2} \tag{1}$$

kaj

$$\eta''^2 + 4\eta'^3 + 2(x\eta' - \eta) = 0, \qquad \zeta' = \eta\zeta.$$

Ĉar ζ estas entjera funkcio, la formulo (1) donas la formulon deziritan.

§ 2. La ekvacio (VI) de Painlevé–Gambier

1. Degenerigo de la ekvacio (VI).

Oni bone scias la laboraĵojn de P. Painlevé kaj B. Gambier pri la duaorda deferenciala ekvacio

$$y'' = R(x, y, y'), \tag{1}$$

kiu havas neniun moviĝeman branĉiĝpunkton. Jen estas ilia rezulto:

Se la ekvacio (1), kies dua membro estas racionala rilate al y', algebra rilate al y, analitika rilate al x, havas neniun moviĝeman branĉiĝpunkton, ĝi estas aŭ integrebla per kvadraturoj aŭ reduktebla al linea diferenciala ekvacio aŭ reduktebla al unu el la ses ekvacioj jenaj:

$$\text{(I)} \quad y'' = 6y^2 + x,$$

$$\text{(II)} \quad y'' = 2y^3 + xy + \alpha,$$

$$\text{(III)} \quad y'' = \frac{y'^2}{y} - \frac{y'}{x} + \frac{1}{x}(\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y},$$

$$\text{(IV)} \quad y'' = \frac{y'^2}{2y} + \frac{3}{2}y^3 + 4xy^2 + 2(x^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y},$$

$$\text{(V)} \quad y'' = y'^2\left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right) - \frac{y'}{x} + \frac{\alpha}{x^2}y(y-1)^2 + \frac{\beta}{x^2}\frac{(y-1)^2}{y} + \frac{\gamma y}{x} + \frac{\delta y(y+1)}{(y-1)}$$

$$\text{(VI)} \quad y'' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right]y'^2 - \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right]y'$$
$$+ \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[\alpha + \frac{\beta x}{y^2} + \frac{\gamma(x-1)}{(y-1)^2} + \frac{\delta x(x-1)}{(y-x)^2}\right],$$

kie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ estas konstantoj. La demonstracio de la fakto ke la ekvacio havas neniun branĉiĝpunkton estas skizita de P. Painlevé en lia artikolo aperinta en C. R. **143**(1906), 1111–1117. Li tie ankaŭ montris ke la kvin ekvacioj (I)–(V) estas degenrintoj de (VI). Lian kalkulon ni volas reprodukti sube.

Metu en (VI)

$$\delta = \frac{\delta_1}{\varepsilon^2}, \qquad \gamma = -\frac{\delta_1}{\varepsilon^2} + \frac{\gamma_1}{\varepsilon}, \qquad x = 1 + \varepsilon X,$$

kaj X, γ_1, δ_1 estu anstataŭataj de x, γ, δ. Ni havas

$$y'' = \left[\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right] y'^2 - \frac{y'}{x} + \frac{y(y-1)^2}{x^2}\left[\alpha + \frac{\beta}{y^2} + \frac{\gamma x}{(y-1)^2} + \frac{\delta x^2(y+1)}{(y-1)^3}\right] + \varepsilon(\ldots),$$

kiu koincidas kun (V) por $\varepsilon = 0$.

(III) kaj (IV) estas degenerintoj de (V). Por tion vidi, metu en (V)

$$y = 1 + \varepsilon Y, \qquad \beta = -\frac{\beta_1}{\varepsilon^2}, \qquad \alpha = \frac{\beta_1}{\varepsilon^2} + \frac{\alpha_1}{\varepsilon}, \qquad \gamma = \varepsilon \gamma_1, \qquad \delta = \varepsilon^2 \delta_1$$

kaj $Y, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ estu anstataŭataj de $y, \alpha, \beta, \gamma, \delta$. Ni havas

$$y'' = \frac{y'^2}{y} - \frac{y'}{x} + \frac{\alpha y^2}{x^2} + \frac{2\beta y^3}{x^2} + \frac{\gamma}{x} + \frac{2\delta}{y} + \varepsilon(\ldots).$$

Se ni metas

$$x = X^2, \qquad y = XY, \qquad \varepsilon = 0,$$

la transformito, kie $X, Y, 4\alpha, 4\gamma, 8\beta, 8\delta$ estas anstataŭataj respektive per $x, y, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, koincidas kun (III).

Metu en (V)

$$x = 1 + \varepsilon X, \qquad y = \varepsilon Y, \qquad \alpha = \frac{1}{2\varepsilon^4}, \qquad \gamma = -\frac{1}{\varepsilon^4}, \qquad \delta = -\frac{1}{2\varepsilon^4} + \frac{\alpha_1}{\varepsilon^2}$$

kaj X, Y, α_1 estu anstataŭataj de x, y, α respektive. La transformito skribiĝas

$$y'' = \frac{y'^2}{2y} + \frac{3}{2} y^3 + 2xy^2 + y\left(\frac{x^2}{2} - \alpha\right) + \frac{\beta}{y} + \varepsilon(\ldots).$$

Tiu ekvacio koincidas kun (IV) por $\varepsilon = 0$, se oni anstataŭigas $x/\sqrt{2}$, $\sqrt{2}y, 4\beta$ per x, y, β respektive.

La ekvacio (II) estas degenerinto de (III) kaj de (IV). Por tion vidi, metu en (III)

$$x = 1 + \varepsilon^2 X, \qquad y = 1 + 2\varepsilon Y, \qquad \gamma = -\delta = \frac{1}{4\varepsilon^6}, \qquad \alpha = \frac{-1}{2\varepsilon^6}, \qquad \beta = \frac{1}{2\varepsilon^6}(1 + 4\alpha_1 \varepsilon^3)$$

kaj X, Y, α_1 estu anstataŭataj de x, y, α respektive. La transformito koincidas kun (II) por $\varepsilon = 0$.

Metu en (IV)

$$x = -\frac{1}{\varepsilon^{3/2}}(1 - \varepsilon^2 X), \qquad y = \frac{1}{\varepsilon^{3/2}}(1 + 2\varepsilon Y), \qquad \alpha = -\frac{1}{2\varepsilon^3} - \alpha_1, \qquad \beta = -\frac{1}{2\varepsilon^6},$$

kaj X, Y, α_1 estu anstataŭataj de x, y, α respektive. La transformito skribiĝas

$$y'' = 8y^3 + 4xy + \alpha + \varepsilon(\ldots).$$

Tiu ĉi koincidas kun (II) por $\varepsilon = 0$ se ni anstataŭigas $2^{2/3}x, 2^{1/3}y, \alpha/2$ per x, y, α.

(I) estas degenerinto de (II). Por tion vidi, metu

$$x = -6\varepsilon^{-5/3}(1 + \varepsilon^2 X), \qquad y = \varepsilon^{-5/6}(1 + \varepsilon Y), \qquad \alpha = 4/\varepsilon^{5/2}$$

kaj X, Y estu anstataŭataj de x, y. La transformito skribiĝas

$$y'' = 216(y^2 - x) + \varepsilon(\ldots).$$

Tiu ĉi koincidas kun (I) por $\varepsilon = 0$, se x kaj y estas anstataŭataj de $-x/6^5, y/6^2$.

Konsekvence, ni havas la jenan diagramon:

$$\begin{tikzcd}
 & & (\mathrm{III}) \arrow[dr] & & \\
(\mathrm{VI}) \arrow[r] & (\mathrm{V}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (\mathrm{II}) \arrow[r] & (\mathrm{I}) \\
 & & (\mathrm{IV}) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

kaj por vidi ke la ekvacioj (I)–(V) havas neniun moviĝeman branĉiĝpunkton, estas sufiĉe montri la samon pri (VI).

2. Simetrieco de la ekvacio (VI).

Konsideru ekzemple la transformojn

(1) $$x = 1 - X, \qquad y = 1 - Y;$$

(2) $$x = 1/X, \qquad y = 1/Y;$$

(3) $$x = X, \qquad y = X/Y.$$

La ekvacio (VI) ŝanĝiĝas per tiuj ekvacioj al la sama ekvacio, kies parametroj $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ havas la valorojn

$$\alpha, -\gamma, -\beta, \delta; \qquad -\beta, -\alpha, \gamma, \delta; \qquad -\beta, -\alpha, \frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} - \gamma$$

respektive. Metu do

$$\alpha_0 = -\beta, \qquad \alpha_1 = \gamma, \qquad \alpha_\infty = \alpha, \qquad \alpha_x = \frac{1}{2} - \delta.$$

La transformoj (1), (2), (3) respondigas al la valoroj $0, 1, \infty, x$ de y la valorojn

$$1, 0, \infty, X; \qquad \infty, 1, 0, X; \qquad \infty, X, 0, 1$$

kaj la parametroj $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_\infty, \alpha_x$ ŝanĝiĝas al

$$\alpha_1, \alpha_0, \alpha_\infty, \alpha_x; \qquad \alpha_\infty, \alpha_1, \alpha_0, \alpha_x; \qquad \alpha_\infty, \alpha_x, \alpha_0, \alpha_1.$$

Ni skribas la transformojn (1), (2), (3) jene:

$$(j)' \qquad X = L_j x, \qquad Y = T_j y \qquad (j = 1, 2, 3).$$

L_j estas linea transformo kiu respondigas are $0, 1, \infty$ al $0, 1, \infty$ kaj T_j estas linea transfomo kiu respondigas are $0, 1, \infty, X = L_j x$ al $0, 1, \infty, x$. Ni diros ke ia ajn transformo

$$(4) \qquad X = Lx, \qquad Y = Ty,$$

kiu posedas tiun econ, estas esprimebla kiel produto de la tri transformoj (1), (2), (3).

T_1, T_2 kaj $T_1 T_3 T_2 T_1$ estas respektive la interŝanĝoj de 0 kaj $1, 0$ kaj $\infty, 0$ kaj x, se oni identigas X al x. T estas do la produto de la tri transformoj T_1, T_2, T_3 ripete skribitaj laŭ ia ordo. Se

$$T = T_{j_1} T_{j_2} \dots T_{j_n},$$

oni havas

$$L = L_{j_1} L_{j_2} \dots L_{j_n}.$$

Do, per la transformo (4), la ekvacio (VI) ŝanĝiĝas al la sama ekvacio kun la parametroj

$$(5) \qquad \alpha_0' = \alpha_{T'0}, \qquad \alpha_1' = \alpha_{T'1}, \qquad \alpha_\infty' = \alpha_{T'\infty}, \qquad \alpha_X' = \alpha_{T'X},$$

kie T' estas la inversa transformo de T.

3. Ekzisto de la nuliĝanta regula solvo.

Serĉante formalan solvon

$$y \approx c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots,$$

ni trovas

$$c_1 = \pm \frac{\sqrt{2\alpha_0}}{a-1}, \qquad c_2 = h, \dots,$$

kie h estas arbitra konstanto. Ni metas do

$$(1) \qquad y' = \frac{\sqrt{2\alpha_0}}{x-1} + \frac{x-1}{\sqrt{2\alpha_0}} yu.$$

Diferenciante tiun rilaton, ni havigas al ni la ekvacion

$$u' = \frac{P(x, y, u)}{x^2(x-1)^3(y-1)^2(y-x)^2} \tag{2}$$

kie $P(x, y, u)$ estas polinomo. Estas grave rimarki ke y ne estas faktoro de la denominatoro. *Se do* $y, 1/(y-1)(y-a)$ *kaj* u *estas superumataj sur ia punktovico konverĝanta al a diferenca de* $0, 1, \infty$, y *kaj* u *estas regulaj ĉe* a.

Analogan konkludon havos ni, por la singulaj valoroj $1, a, \infty$ de y pro la simetrieco.

Formante la kvadraturon de (1), ni havas

$$y'^2 = \frac{2\alpha_0}{(x-1)^2} + 2yu + \frac{(x-1)^2}{2\alpha_0} y^2 u^2,$$

kaj la funkcio

$$v = \frac{y'^2}{2y} - \frac{\alpha_0}{y(x-1)^2}$$

povas ludi la saman rolon kiel u. Ĝi estas pli taŭga ol u, ĉar al la nuliĝanta solvo y respondas v kiu estas regula ĉe a, dum u ne havas tiun econ. Pli ĝenerale, ni povas uzi la funkcion

$$U = \frac{f(x, y)}{y} y'^2 + g(x, y) y' + \frac{h(x, y)}{y},$$

kie $f(x, y), g(x, y), h(x, y)$ estas regulaj ĉe $(0, 0)$, kondiĉe ke ni havu

$$\frac{f(x, 0)}{h(x, 0)} = -\left\{\frac{2\alpha_0}{(x-1)^2}\right\}^{-1}.$$

Ni formos en la sekvanta paragrafo la funkcion U kiu ludas samtempe la saman rolon por la singulaj valoroj $0, 1, a, \infty$ de y.

4. Formado de la polinomo U.

Konsideru la funkcion

$$\frac{x(x-1)y'^2}{2y(y-1)(y-x)}.$$

Ĝi ŝanĝiĝas per la transformoj

$$x = 1 - X, \ y = 1 - Y; \qquad x = \frac{1}{X}, \ y = \frac{1}{Y}; \qquad x = \frac{X}{X-1}, \ y = \frac{X-Y}{X-1}$$

al

$$-\frac{X(X-1)Y'^2}{2Y(Y-1)(Y-X)}; \qquad -\frac{X^3(X-1)Y'^2}{2Y(Y-1)(Y-X)};$$

$$-\frac{X(X-1)^3Y'^2}{2Y(Y-1)(Y-X)}+\frac{X(X-1)^2Y'}{Y(Y-X)}-\frac{X(X-1)(Y-1)}{2Y(Y-X)}$$

respektive. Por la singula valoro $y=1$, sufiĉas adicii

$$\frac{\alpha_1}{(X-1)Y}=\frac{\alpha_1}{x(y-1)}.$$

Por la singula valoro $y=\infty$, sufiĉas adicii

$$\frac{\alpha_\infty X^2}{(X-1)Y}=-\frac{\alpha_\infty y}{x(x-1)}.$$

Por la singula valoro $y=x$, sufiĉas adicii

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha_x(X-1)}{Y}+\frac{(X-1)^2Y'}{Y}+\frac{X-1}{2Y}\\&\quad=-\frac{\alpha_x}{y-x}-\frac{1}{2(y-x)}+\frac{y-1}{(x-1)(y-x)}-\frac{y'}{y-x}\end{aligned}$$

aŭ

$$-\frac{\alpha_x-1/2}{y-x}-\frac{y'}{y-x},$$

kiu diferencas de la antaŭa per regula funkcio de y ĉe $y=x$. Tamen la dua termo aliformiĝas per la transformo $x=1/X, y=1/Y$ al $X^3Y'/Y(Y-X)$ kiu havas poluson ĉe $Y=0$. Do ni anstataŭigas ĝin per

$$-\frac{y'}{y-x}\frac{x-\beta}{y-\beta},$$

signante per β ajnan konstanton. Sekve ni metas

$$U=\frac{x(x-1)y'^2}{2y(y-1)(y-x)}-\frac{\alpha_0}{(x-1)y}+\frac{\alpha_1}{x(y-1)}-\frac{\alpha_\infty y}{x(x-1)} -\frac{\alpha_x-1/2}{y-x}-\frac{y'}{y-x}\frac{x-\beta}{y-\beta}. \tag{1}$$

5. Superumateco de U.

Post iom enuiga kalkulo, ni trovas

$$
\begin{aligned}
U' = y'^2 & \left[- \frac{x(x-1)}{2y(y-1)(y-x)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) - \frac{x-\beta}{2(y-x)(y-\beta)} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} - \frac{2}{y-\beta} \right) \right. \\
& \left. + \frac{(x-\beta)(y-\beta) - \beta(\beta-1)}{2y(y-1)(y-x)(y-\beta)} \right] + y' \left[\frac{x-\beta}{(y-x)(y-\beta)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-\beta} \right) \right] \\
& + \left[\frac{\alpha_0}{(x-1)^2 y} \left(1 + \frac{(y-1)(x-\beta)}{x(y-\beta)} \right) - \frac{\alpha_1}{x^2(y-1)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{(y-1)(x-\beta)}{(x-1)(y-\beta)} \right) \right. \\
& + \frac{\alpha_\infty y}{x(x-1)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{(y-1)(x-\beta)}{x(x-1)(y-\beta)} \right) \\
& \left. + \frac{\alpha_x - 1/2}{y-x} \frac{(x-\beta)(y-\beta) - \beta(\beta-1)}{x(x-1)(y-\beta)} \right].
\end{aligned} \tag{1}
$$

Skribu la rilatojn (1) en **4** kaj (1) jene

$$
U = f(x, y)y'^2 + g(x, y)y' + h(x, y),
$$

$$
U' = F(x, y)y'^2 + G(x, y)y' + H(x, y).
$$

De tiuj deduktas linean rilaton inter U, U' kaj y':

$$
fU' - FU = (fG - gF)y' + (fH - hF), \tag{2}
$$

kie

$$
fG - gF = \frac{((1-2\beta)x + \beta^2)y + \beta(x - 2\beta + \beta^2)}{2y(y-1)(y-x)(y-\beta)^3}.
$$

$y = 0, 1$ kaj x estas simplaj polusoj de $fH - hF$. Plie $y^3(fH - hF)$ estas regula ĉe $y = \infty$. Solvante (2) rilate al y' kaj portante la tiel hivigitan esprimon de y' en (1) en **4**, ni trovas ekvacion

$$
(U' + AU + B)^2 + C(U' + AU + B) + DU + E = 0, \tag{3}
$$

kie la koeficientoj

$$
A = -\frac{F}{f}, \qquad B = -\frac{fH - hF}{f}, \qquad C = \frac{g(fG - gF)}{f^2},
$$

$$
D = -\frac{(fG - gF)^2}{f^3}, \qquad E = \frac{h(fG - gF)^2}{f^3}
$$

estas racionalaj funkcioj de x, y kiuj havas polusojn nur ĉe $x = 0, 1$ kaj $y = \beta$, enkalkulante la infinituman punkton. Ni havas do, supozante $\beta \neq 0, 1, a, \infty$ kaj $a \neq 0, 1, \infty$, la neegalaĵon

$$|U'| \leq H|U| + K \tag{4}$$

por

$$|y - \beta| \geq \varepsilon, \qquad |x - a| \leq \varepsilon, \tag{5}$$

kie H kaj K estas pozitivaj konstantoj kaj ε estas sufiĉe malgranda pozitiva nombro.

C estu finitlonga kurbo finiĝanta ĉe $x = a$. Se la solvo y de (VI) estas superumata sur C, de la neegalaĵo rezultas la superumateco de U sur C.

6. Solvo por kiu U estas superumata.

Konsideru solvon y por kiu U estas superumata sur ia punktovico $\{a_k\}$ konverĝanta al $a \neq 0, 1, \infty$. Ni signas per b_k, b'_k kaj μ_k la valorojn kiujn prenas y, y' kaj U ĉe a_k. Unue ni supozas ke la tri vicoj $\{b_k\}, \{b'_k\}$ kaj $\{\mu_k\}$ konverĝas. b, b' kaj μ estu iliaj limoj. Se b diferencas de β, ∞, la rilato (4.1), kiu estas plenumata de $y = b_k$, $y' = b'_k$, $U = \mu_k$, montras ke la vico $\{b'_k\}$ estas superumata. Se plie b diferencas de $0, 1, a$, la solvo estas regula ĉe a laŭ la unikecteoremo. Supozu do $b = 0$. Tiam ni havas

$$b'^2 = \frac{2\alpha_0}{(a-1)^2}$$

kaj ni povas supozi

$$b' = \frac{\sqrt{2\alpha_0}}{a-1},$$

prenante konvene unu el la du valoroj de la kvadratura radiko de $2\alpha_0$. La ekvacio (1) havas nur unu radikon y' kiu konverĝas al b' kiam $x \to a$, $y \to 0$. Ĝi estas regula funkcio de x, y, U ĉe $(a, 0, \mu)$ kaj ni havas la ekspansion

$$y' = \frac{\sqrt{2\alpha_0}}{x-1} + \frac{y}{\sqrt{2\alpha_0}}\left\{\frac{\alpha_1}{x} - \frac{\alpha_x - 1/2}{x} + \frac{\sqrt{2\alpha_0}(x-\beta)}{\beta x(x-1)} - \frac{\alpha_0(x+1)}{x(x-1)} + U\right\} + \cdots.$$

Se do u_k estas la valoro ĉe a_k de u diffinita de (1) en **3**, la vico $\{u_k\}$ konverĝas samtempe kune kun $\{\mu_k\}$. Sekve, y estas regula ĉe a laŭ la rezulto de la paragrafo 3.

Pro la simetrieco, ni havas la analogan konkludon kiam b koincidas kun unu el la tri valoroj $1, a, \infty$. Ni havas do la propozicion:

Ia solvo, por kiu U estas superumata sur finitlonga kurbo finiĝanta ĉe $a \neq 0, 1, \infty$, estas regula aŭ meromorfa ĉe $x = a$, kondiĉe ke y neniam eniras en ian cirkaŭaĵon de β.

7. Neekzisto de moviĝema branĉiĝpunkto.

Nun ni povas demonstracii la neenziston de moviĝema branĉiĝpunkto. Por tion montri, ni supozas la kontraŭecon, t.e. la ekziston de branĉiĝpunkto diferenca de $0, 1, \infty$. Ĝi devas esti transcenda punkto. Ni supozas do la ekziston de cirklo K interne de kiu y estas meromorfa sed sur kies cirkonferenco sin trovas transcenda punkto $a(\neq 0, 1, \infty)$ de y. Ni signas per Γ la radion kies ekstremo estas a.

$\lambda > 1$ estu ia ajn nombro pli granda je module ol la koeficiento de y'^2 en la dua membro de (VI). Se ρ estas sufiĉe malgranda, la dua membro de (VI) ne povas superi $\lambda|y'^2|$ je modulo por

$$(1) \qquad |x - a| \leq 2\rho, \qquad |y - \beta| \leq 2\rho, \qquad |y'| \geq \frac{1}{2\rho}.$$

b_1 kaj b_1' estu la valoroj de y kaj y' ĉe $a_1 \in \Gamma$. Laŭ la rezulto de la paragrafo 6, ekzistas, kiel ajn malgranda estas pozitiva nombro ρ_1, tia punkto a_1, ke ni havas

$$(2) \qquad |a_1 - a| \leq \rho_1, \qquad |b_1 - \beta| \leq \rho_1, \qquad |b_1'| \geq \frac{1}{\rho_1}.$$

Supozu ke oni havas

$$(3) \qquad |y - b_1| \leq \varepsilon, \qquad \left|\frac{1}{y'} - \frac{1}{b_1'}\right| \leq \frac{2\varepsilon}{|b_1'|}$$

por $|x - a_1| \leq \varepsilon/(\lambda|b_1'|)$, kie ε pozitiva konstanto plenumanta la sube klarigotajn kondiĉojn.

Unue ni supozas

$$(4) \qquad \rho_1 < \rho, \qquad \varepsilon < \rho, \qquad 2\varepsilon\rho_1 < \rho.$$

Tiam (2), (3) kaj $|x - a_1| \leq \varepsilon/(\lambda|b_1'|)$ sekivigas (1). Ni havas do

$$|y''| \leq \lambda|y'^2|.$$

Integrante tiun neegalaĵon, ni ricevas la neegalaĵon

$$\left|\frac{1}{y'} - \frac{1}{b_1'}\right| \leq \lambda|x - a_1|,$$

kies dua membro estas pli malgranda ol $\varepsilon/|b_1'|$. De tio rezultas

$$|y' - b_1'| \leq \varepsilon|y'|, \qquad |y'| \leq \frac{|b_1'|}{1 - \varepsilon}$$

kaj

$$|y' - b_1'| \leq \frac{\lambda}{1 - \varepsilon}|b_1'|^2|x - a_1|.$$

Integrante tiun neegalaĵon, ni ricevas

$$|y - b_1 - b_1'(x - a_1)| \leq \frac{\lambda}{2(1-\varepsilon)} |b_1'|^2 |x - a_1|^2,$$

de kio rezultas

$$|y - b_1| \geq \left(1 - \frac{\lambda |b_1'||x - a_1|}{2(1-\varepsilon)}\right) |b_1'||x - a_1|, \tag{5}$$

$$|y - b_1| \leq \left(1 + \frac{\lambda |b_1'||x - a_1|}{2(1-\varepsilon)}\right) |b_1'||x - a_1|, \tag{5$'$}$$

kaj $|y - b_1| < \varepsilon$, se

$$1 + \frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)} < \lambda. \tag{4$'$}$$

Konsekvence, oni havas por $|x - a_1| \leq \varepsilon/(\lambda |b_1'|)$ la neegalaĵojn (3), kie la egalaĵo estas forigita, sub la hipotezoj (4) kaj (4)$'$. Tiuj kondiĉoj estas plenumataj por sufiĉe malgranda ε. *Tiam ni havas* (3) *por* $|x - a_1| \leq \varepsilon/(\lambda |b_1'|)$ *kaj sekve* (5) *kaj* (5)$'$.

Ni prenas ε sufiĉe malgranda tiel ke oni havu

$$\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} < \frac{1}{2} \tag{4$''$}$$

kaj metas $\rho_1 = \varepsilon/(16\lambda)$. La neegalaĵo (5) sekvigas

$$|y - \beta| > \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\lambda}$$

por $|x - a_1| = \varepsilon/(\lambda |b_1'|)$ kaj

$$|y - \beta| > \frac{1}{8} \frac{\varepsilon}{\lambda}$$

por $|x - a_1| = \varepsilon/(4\lambda |b_1'|)$, dum la neegalaĵo (5)$'$ sekvigas

$$|y - \beta| < \frac{3}{8} \frac{\varepsilon}{\lambda}$$

por $|x - a_1| \leq \varepsilon/(4\lambda |b_1'|)$. Ni povas do rezonadi kiel en § **1**, **4** kaj atingas la jenan konkludon:

La ekvacio (VI) *havas nenium moviĝeman branĉiĝpunkton.*

Nia demonstracio supozis la nenulecon de $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_x, \alpha_\infty$. Tamen tiu limiga kondiĉo estas forigebla laŭ la bone konata procedo de Painlevé.

References

[1] Okamoto, K., Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **285**(1977), 765–767.

[2] Okamoto, K., Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé, Japan. J. Math., **5**(1979), 1–79.

[3] Painalvé, P., Mémoire sur les équations différentielles dont l'integrale generale est uniforme, Bull. Soc. Math. France, **28**(1900), 206–261.

[4] Painlevé, P., Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes, C. R. Acad. Sci. Paris, **143**(1906), 1111–1117.

nuna adreso:

Kazuo Okamoto
Graduate School of Mathematical Sciences
The University of Tokyo
Komaba, Tokyo 153-8919
Japan
E-mail: okamoto@poisson.ms.u-tokyo.ac.jp

Kyoichi Takano
Department of Mathematics
Faculty of Science
Kobe University
Rokko, Kobe 657-8501
Japan
E-mail: takano@math.kobe-u.ac.jp

(Ricevita la 24-an de majo, 2001)