

**Etude des Equations de la Forme $\tau y = F(x, y)$ où τ est un
Champ de Vecteurs Singulier à l'Origine de C^n et $F(x, y)$ une
Fonction Holomorphe à l'Origine de C^n**

By

H. CHARRIÈRE and R. GÉRARD

(I.R.M.A., France)

Introduction

L'étude et la recherche de formes normales des équations différentielles et des systèmes de la forme

$$x dy/dx = f(x, y)$$

où $f(x, y)$ est une fonction holomorphe à l'origine de C^2 vérifiant $f(0, 0) = 0$, a fait l'objet de nombreuses publications (voir [1] et [2] et les références bibliographiques de [2]). S'il est étonnant, par exemple, que le cas $f(0, 0) \neq 0$ n'ait pas été étudié, il est tout aussi surprenant que l'on n'ait pas pensé à étudier complètement les mêmes questions pour une équation de la forme

$$(E) \quad \tau y = F(x, y)$$

où

- $x = (x_1, \dots, x_n)$
- $\tau = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i(x) \partial / \partial x_i$ est un champ de vecteurs singulier à l'origine de C^n ($a_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, n$)
- $F(x, y)$ une fonction holomorphe à l'origine de C^{n+1} .

Pourtant on a un certain nombre de résultats.

[6]. Si $F(0, 0) \neq 0$ l'équation (E) est analytiquement équivalente à

$$\tau z = F(0, 0).$$

[3] et [4]. Si l'équation (E) admet une solution formelle elle admet une solution holomorphe.

On a un certain nombre d'autres résultats (voir [4], [5], [7] et [8]). Il reste cependant encore des cas intéressants à étudier concernant l'équation (E) et le but de cette article est de combler un certain nombre de ces lacunes, pas toutes car le problème est difficile dans toute sa généralité. Nous essayons ici de donner un certain nombre de réponses et également de donner lorsque

ceci est possible les solutions formelles et analytiques de l'équation (E). La lecture du §1 donne une idée des problèmes restant à étudier.

§1. Rappels

Soit

$$\tau = \sum_{1 \leq i \leq p} a_i(x_i) \partial / \partial x_i$$

un champ de vecteurs dont tous les coefficients sont holomorphes dans un voisinage de l'origine de \mathbb{C}^p et vérifient $a_i(0) = 0$. Donc un champ de vecteurs singulier à l'origine de \mathbb{C}^p .

Rappelons ici un certain nombre de résultats concernant des équations de la forme:

$$(E) \quad \tau y = \sum_{1 \leq i \leq p} a_i(x) \partial y / \partial x_i = F(x, y)$$

où $F(x, y)$ est holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}$.

Théorème 1.1 ([6]). *Si $F(0, 0) \neq 0$ l'équation (E) est analytiquement équivalente à*

$$\tau z = a = F(0, 0).$$

Supposons maintenant que $F(0, 0) = 0$. Soit \mathcal{A} le germe d'ensemble analytique défini par $a_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, p$ à l'origine de \mathbb{C}^p , supposons

1°) que \mathcal{A} définit à l'origine de \mathbb{C}^p un germe de variété régulière,

2°) que les valeurs propres non nulles du champ de vecteurs τ vérifient une condition de Poincaré.

Alors,

Théorème 1.2 (S. Kaplan [3], [4]). *Si l'équation (E) admet une solution formelle, elle admet une solution analytique.*

Théorème 1.3 ([4]). *Si le champ de vecteurs τ est semi-simple et si ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ vérifient une condition de Poincaré ou de Siegel, alors par un changement de coordonnées holomorphe l'équation (E) se transforme en une équation de la forme*

$$(E') \quad \tau y = \sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i x_i \partial y / \partial x_i = f(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq p} a_i x_i + by + f^2(x, y)$$

avec $f^2(x, y) = \sum_{|n|+|m| \geq 2} f_{n,m} x^n y^m$.

Soit

$$\tau = \sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i x_i \partial / \partial x_i$$

un champ de vecteurs semi simple sous forme normale, considérons une équation de la forme

$$(1) \quad \tau y = f(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq p} a_i x_i + by + f^2(x, y)$$

où $x = (x_1, \dots, x_p)$ et $f^2(x, y) = \sum_{|n|+m \geq 2} f_{n,m} x^n y^m$. Notons

$$\mathcal{M}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = \{ \sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i m_i; m_i \in \mathbb{N} \} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}^* = \mathcal{M}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) - \{0\}$$

$$\varphi^-(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = \{ -(\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i m_i)/s; m_i \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} \}.$$

D'après [4], [7], [8] et [9] nous savons:

Théorème 1.4. *Si le champ de vecteurs τ vérifie une condition de Poincaré ou de Siegel. Alors*

- 1) *Toute solution formelle de (1) est convergente.*
- 2) *Si $b \notin \mathcal{M}^*$ l'équation (1) admet une solution formelle et une seule donc une unique solution holomorphe.*

Il reste donc des cas intéressants à étudier, si l'équation (1) n'admet pas de solution formelle ou si $b \in \mathcal{M}^*$.

§ 2. Réduction formelle

Soit $\tau = \sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i x_i \partial / \partial x_i$ un champ de vecteurs semi simple sous forme normale. On cherche des formes réduites formelles pour des équations de la forme

$$(1) \quad \tau y = \sum_{1 \leq i \leq p} a_i x_i + by + f^2(x, y)$$

où

$$f^2(x, y) = \sum_{|n|+m \geq 2} f_{n,m} x^n y^m.$$

C'est à dire que, par une transformation $y = \varphi(x, z)$ formelle inversible, on puisse mettre (1) sous la forme la plus simple possible. C'est à dire donner des formes normales formelles.

Posons formellement

$$(2) \quad y = \varphi(x, z) = \sum_{|n|+m \geq 1} \varphi_{n,m} x^n z^m$$

alors

$$\tau y = \sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i x_i \partial \varphi / \partial x_i + \tau z \partial \varphi / \partial z = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i x_i + b \varphi(x, z) + f^2(x, \varphi(x, z)).$$

Premier cas $b \notin \mathcal{M}$ et $b \notin \mathcal{q}^-$ et $b \neq 0$.

Théorème 2.1. *Si $b \notin \mathcal{M}$ et $b \notin \mathcal{q}^-$ et $b \neq 0$, l'équation (1) est formellement équivalente à*

$$\tau z = bz .$$

Pour cela on doit montrer que l'équation:

$$(2) \quad \begin{aligned} \tau y &= \sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i x_i \partial \varphi / \partial x_i + bz \partial \varphi / \partial z \\ &= \sum_{1 \leq i \leq p} a_i x_i + b \varphi(x, z) + f^2(x, \varphi(x, z)) \end{aligned}$$

admet une solution formelle telle que $(\partial \varphi / \partial z)(0, 0) \neq 0$. Par identification formelle nous obtenons:

$$\left(\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i n_i + mb - b \right) \varphi_{n, m} = F_{n, m}((\varphi_{p, q}), (R))$$

où $(\varphi_{p, q})$ désigne l'ensemble des éléments $\varphi_{p, q}$ avec $|p| + q \leq |n| + m$ et R l'ensemble des coefficients $f_{p, q}$ avec $|p| + q \leq |n| + m$ de plus $F_{n, m}((\varphi_{p, q}), R)$ est un polynôme en ses arguments. En particulier au début de l'identification nous avons:

$$\begin{aligned} (\lambda_i - b) \varphi_{(i), 0} &= a_i \quad i = 1, \dots, p \\ (b - b) \varphi_{0, \dots, 0, 1} &= 0 \end{aligned}$$

où $(i) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ le 1 étant situé à la $i^{\text{ième}}$ place. On obtient ainsi $\varphi_{(i), 0}$ pour $i = 1, \dots, p$ alors que $\varphi_{0, \dots, 0, 1}$ est arbitraire en particulier on peut prendre $\varphi_{0, \dots, 0, 1} = 1$.

Si on ordonne les multi-indices de la manière suivante

$$\begin{aligned} (1, 0, \dots, 0) &< (0, 1, \dots, 0) < \dots < (0, \dots, 0, 1) < (2, 0, \dots, 0) < (1, 1, \dots, 0) \\ &< (1, 0, 1, \dots, 0) < \dots < (1, 0, \dots, 1) \\ &< (0, 1, 1, \dots, 0) \dots < \dots < (0, \dots, 0, 2) \text{ ect...} \end{aligned}$$

on obtient en poursuivant l'identification: pour tout $q = |n| + m$

$$A_q \varphi_q = F_q((\varphi_r)_{|r| < q}, f_{i, p, |i| + p \leq q}),$$

où pour tout r , φ_r est la matrices colonne dont les éléments sont $\varphi_{|n|, m}$ avec $|n| + m = r$ ordonnés comme indiqué ci-dessus, F_q étant également une matrice colonne fonction des éléments indiqués ci-dessus, A_q est la matrice diagonale que nous écrivons que pour $i = 2$ pour des raisons de simplicité

$$\left[\begin{array}{cccccccc} (\lambda_1 q - b) & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & (\lambda_1(q-1) + \lambda_2 - b) & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_1(q-1) + b - b) & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & (\lambda_1(q - (r+s) + \lambda_2 r + sb - b) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & (\lambda_1 + (q-1)b - b) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & (qb - b) \end{array} \right]$$

En conclusion nous obtenons, si $b \notin \mathcal{M}$ et $b \notin \varphi^-$ et $b \neq 0$, l'équation (2) admet une solution formelle et une seule, c'est à dire le Théorème 2.1.

Deuxième cas $b \notin \varphi^-$ et $b \notin \mathcal{M}$ et $b \neq 0$. Donc

$$b = -(\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i m_i^0) / q, \quad m_i^0 \in \mathbb{N}, \quad q \neq 1, \quad q \neq 0 \quad \text{et} \quad b \neq 0.$$

Notons

$$\mathcal{K} = \{(m_i)_{1 \leq i \leq p} \mid \sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i m_i = 0\}.$$

Supposons d'abord que $\mathcal{K} = \{(0, \dots, 0)\}$, c'est à dire que 0 est extérieur à l'enveloppe convexe des λ_i ;

$$(1) \quad \tau y = \sum_{1 \leq i \leq p} a_i x_i + by + f^2(x, y)$$

on va chercher une équation aussi simple que possible de la forme

$$(2) \quad \tau z = g(x, z) = \sum_{1 \leq i \leq p} g_i x_i + g_0 z + g^2(x, z)$$

formellement équivalente à (1) par une transformation formelle

$$(3) \quad y = \varphi(x, z) = \sum_{1 \leq i \leq p} \varphi_i x_i + \varphi_0 z + \Phi^2(x, z)$$

donc avec $\varphi_0 \neq 0$. On envisagera également le cas $\varphi_0 = 0$.

L'équation de couplage c'est à dire l'équation dont est solution la transformation formelle si elle existe est:

$$\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i x_i \partial \varphi / \partial x_i + g(x, z) \partial \varphi / \partial z = \sum_{1 \leq i \leq p} a_i x_i + b \varphi(x, z) + f^2(x, \varphi(x, z)),$$

par identification formelle nous obtenons au début:

$$(\lambda_i - b) \varphi_{(i),0} + g_{(i),0} \varphi_{0,\dots,0,1} = a_i \quad i = 1, \dots, n$$

et

$$g_{0,\dots,0,1}\varphi_{0,\dots,0,1} = b\varphi_{0,\dots,0,1}.$$

Si on veut $\varphi_{0,\dots,0,1} \neq 0$ il faut prendre $g_{0,\dots,0,1} = b$ et par exemple $\varphi_{0,\dots,0,1} = 1$.

Il est facile de voir que l'on peut déterminer de manière unique tous les coefficients $\varphi_{m_1,\dots,m_p,s}$ avec $m_1 + \dots + m_p + s < m_1^0 + m_p^0 + q + 1$ par identification des monômes en x_1, \dots, x_n, z de degré total strictement inférieur à $m_1^0 + \dots + m_p^0 + q + 1$. Les coefficients de $g(x, z)$ intervenant dans ces formules peuvent être pris arbitrairement à l'exception de $g_{0,\dots,0,1}$ qui est égal à b , nous les prendrons nuls. Pour les monômes de degré total $m_1^0 + \dots + m_p^0 + q + 1$, nous obtenons par identification du terme en $(x_1)^{m_1^0} \dots (x_p)^{m_p^0} z^{q+1}$ une indétermination:

$$\begin{aligned} & [\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i m_i^0 + (q+1)g_{0,\dots,0,1} - b] \varphi_{m_1^0, \dots, m_p^0, q+1} + g_{m_1^0, \dots, m_p^0, q+1} \varphi_{0,\dots,0,1} \\ & = (\text{une expression connue en fonction des } \varphi_{m_1, \dots, m_p, s} \text{ qui} \\ & \quad \text{précèdent } \varphi_{m_1^0, \dots, m_p^0, q+1} \text{ dans l'ordre indiqué ci-dessus}). \end{aligned}$$

Comme $g_{0,\dots,0,1} = b = -(\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i m_i^0)/q$, cette équation ne permet pas de déterminer $\varphi_{m_1^0, \dots, m_p^0, q+1}$ que l'on prendra arbitraire par contre elle détermine de manière unique $g_{m_1^0, \dots, m_p^0, q+1}$. Ensuite le calcul des coefficients se poursuit sans problème jusqu'à la détermination de $\varphi_{2m_1^0, \dots, 2m_p^0, 2q+1}$ qui nous donne une nouvelle indétermination par contre permet la détermination de $g_{2m_1^0, \dots, 2m_p^0, 2q+1}$ de manière unique. On voit ainsi par récurrence que l'équation donnée est formellement équivalente à une équation de la forme:

$$\tau z = -((\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i m_i^0)/q)z + zh((x_1)^{m_1^0} \dots (x_p)^{m_p^0} z^q)$$

où $h(u)$ est une série formelle en une variable telle que $h(0) = 0$. Posons $u = (x_1)^{m_1^0} \dots (x_p)^{m_p^0} z^q$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \tau u &= (\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i m_i^0)(x_1)^{m_1^0} \dots (x_p)^{m_p^0} z^q + (x_1)^{m_1^0} \dots (x_p)^{m_p^0} qz^{q-1} \tau z \\ &= (\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i m_i^0)u + (x_1)^{m_1^0} \dots (x_p)^{m_p^0} qz^{q-1} \{ -((\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i m_i^0)/q)z + zh(u) \} \\ &= quh(u). \end{aligned}$$

On remarque que l'on est ramené au cas $b = 0$ mais pas par une transformation inversible.

Supposons maintenant $\mathcal{K} \neq \{(0, \dots, 0)\}$. Et $b = -(\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i m_i)/q \neq 0$ cette écriture n'est pas unique car si $r = (r_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathcal{K}$ on peut également écrire

$$b = -(\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i (m_i + r_i))/q.$$

Remarquons que $(r_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathcal{K}$ est équivalent à $\tau((x_1)^{r_1} \dots (x_p)^{r_p}) = 0$ de plus les éléments de \mathcal{K} peuvent être ordonnés en utilisant l'ordre indiqué au début de ce paragraphe.

Ecrivons $b = -(\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i m_i^0)/q$ sous forme irréductible modulo les éléments de \mathcal{K} . Les résonances ont lieu pour les puissances $(x_1)^{m_1^0} \dots (x_n)^{m_p^0} z^{q+1}$ et pour tout $(x_1)^{sm_1^0} \dots (x_p)^{sm_p^0} z^{sq+1}$ avec $s \geq 1$ ainsi que pour tout monôme de la forme $(x_1)^{sm_1^0+r_1} \dots (x_n)^{sm_p^0+r_p} z^{sq+1}$ avec $s \geq 1, (r_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathcal{K}$. Il est alors facile de voir que l'équation donnée est formellement équivalente à une équation de la forme

$$\tau z = bz + z[\sum_{(r) \in \mathcal{K}} h_{(r)}((x_1)^{m_1^0+r_1} \dots (x_n)^{m_p^0+r_p} z^q)]$$

où pour tout $(r) \in \mathcal{K}$, $h_{(r)}(u)$ est une série formelle à une variable bien déterminée vérifiant $h_{(r)}(0) = 0$. Si on pose $u = (x_1)^{m_1^0} \dots (x_p)^{m_p^0} z^q$ qui n'est pas une transformation inversible, on obtient:

$$\tau u = qu[\sum_{(r) \in \mathcal{K}} h_{(r)}((x_1)^{r_1} \dots (x_p)^{r_p} u)].$$

On remarque que l'on est ramené au cas $b = 0$ mais pas par une transformation inversible. Nous avons donc

Théorème 2.2. *Si $b \in \mathcal{K}^-$, $b \notin \mathcal{M}$, $b \neq 0$ l'équation (1) est équivalente formellement à une équation de la forme*

$$\tau z = -((\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i m_i^0)/q)z + zh((x_1)^{m_1^0} \dots (x_n)^{m_p^0} (z)^q) \quad \text{si } \mathcal{K} = \{(0, \dots, 0)\}$$

où $h(u)$ est une série formelle à une variable bien déterminée vérifiant $h(0) = 0$ et à

$$\tau z = bz + z[\sum_{(r) \in \mathcal{K}} h_{(r)}((x_1)^{m_1^0+r_1} \dots (x_p)^{m_p^0+r_p} z^q)] \quad \text{si } \mathcal{K} \neq \{(0, \dots, 0)\}$$

où pour tout $(r) \in \mathcal{K}$, $h_{(r)}(u)$ est une série formelle à une variable bien déterminée vérifiant $h_{(r)}(0) = 0$.

En complément nous obtenons en posant $u = (x_1)^{m_1^0} \dots (x_n)^{m_p^0} (z)^q$ que notre équation se transforme en

$$\tau u = quh(u) \quad \text{si } \mathcal{K} = \{(0, \dots, 0)\}$$

et en

$$\tau u = qu[\sum_{(r) \in \mathcal{K}} h_{(r)}((x_1)^{r_1} \dots (x_p)^{r_p} u)] \quad \text{si } \mathcal{K} \neq \{(0, \dots, 0)\}.$$

Troisième cas $b = 0$.

Supposons d'abord que $\mathcal{K} = \{(0, \dots, 0)\}$. L'équation donnée est:

$$\tau y = \sum_{1 \leq i \leq p} a_i x_i + f^2(x, y) = f(x, y)$$

où

$$f^2(x, y) = \sum_{|n|+r \geq 2} f_{n,r}^2 x^n y^r,$$

l'équation de couplage avec une équation

$$\tau z = g(x, z) \quad \text{avec} \quad g(0, 0) = 0$$

est

$$(*) \quad \tau y = \sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i x_i \partial \varphi / \partial x_i + g(x, z) \partial \varphi / \partial z = \sum_{1 \leq i \leq p} a_i x_i + f^2(x, \varphi(x, z)).$$

Par identification formelle nous obtenons:

$$\lambda_i \varphi_{(i), 0} + g_{(i), 0} \varphi_{0, \dots, 0, 1} = a_i \quad i = 1, \dots, p$$

et

$$g_{0, \dots, 0, 1} \varphi_{0, \dots, 0, 1} = 0.$$

Si on veut $\varphi_{0, \dots, 0, 1} \neq 0$ il faut prendre $g_{0, \dots, 0, 1} = 0$. Comme nous cherchons un $g(x, z)$ aussi simple que possible on peut prendre $g_{(i), 0} = 0$ pour tout $i = 1, \dots, p$ et les $\varphi_{(i), 0}$ sont bien déterminés.

Soit $H_q(x)$, l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré q en les variables variables y_1, y_2, \dots, y_m . L'espace vectoriel $H_q(x)$ est de dimension finie $\delta(q)$, une base $e_q(y)$ de cet espace vectoriel est donnée par les monômes homogènes de degré q en les variables y_1, y_2, \dots, y_m . Il est utile d'ordonner les éléments de $e_q(x)$. L'ordre est donné par induction sur q et m de manière suivante: Pour $m = 1$, $\delta(m) = 1$ et $e_q(y_1) = (y_1)^q$. Pour $q = 0$ et pour tout m , $e_0(y) = (1)$. Pour m arbitraire $e_1(y_1, y_2, \dots, y_m) = (y_1, y_2, \dots, y_m)$; par récurrence sur m et q on définit:

$$e_q(y_1, y_2, \dots, y_m) = \{(y_1)^q; (y_1)^{q-1}(e_1(y_2, \dots, y_m)); (y_1)^{q-2}(e_2(y_2, \dots, y_m)); \dots \\ * \dots (y_1)(e_{q-1}(y_2, \dots, y_m)); (e_q(y_2, \dots, y_m))\}.$$

Cette base ordonnée de $H_q(x)$ sera notée $(e_q(x))$. Nous venons en fait de mettre sur N^m un ordre de la manière suivante: soit

$$(i) = (i_1, i_2, \dots, i_m) \in N^m \quad \text{et} \quad (j) = (j_1, j_2, \dots, j_m);$$

alors si $|i| < |j|$ nous avons $(i) < (j)$; si $|i| = |j| = q$ l'ordre est donné par induction de la façon suivante: par exemple dans le cas $m = 3$

$$(p, 0, 0) < (p-1, 1, 0) < (p-1, 0, 1) < (p-2, 2, 0) < (p-2, 1, 1) \\ < (p-2, 0, 2) < (p-3, 3, 0) < (p-3, 2, 1) < (p-3, 1, 2) \\ < (p-3, 0, 3) < \dots < (0, 0, p).$$

Dans toute la suite lorsque nous identifierons deux séries formelles cela sera dans l'ordre indiqué ci dessus.

En poursuivant l'identification dans l'équation (*) nous obtenons en degré total 2. Pour simplifier la présentation supposons que $p = 2$ pour $p \geq 2$

les résultats sont identiques il n'y a que des complications d'écriture. Nous obtenons par identification

$$\begin{aligned}
 2\lambda_1 \varphi_{2,0,0} + g_{1,0,0} \varphi_{1,0,1} &= f_{2,0,0} + f_{0,0,2}(\varphi_{1,0,0})^2, \\
 (\lambda_1 + \lambda_2) \varphi_{1,1,0} + g_{1,0,0} \varphi_{0,1,1} + g_{0,1,0} \varphi_{1,0,1} \\
 &= f_{1,1,0} + f_{1,0,1} \varphi_{0,1,0} + f_{0,1,1} \varphi_{1,0,0} + f_{0,0,2} 2\varphi_{1,0,0} \varphi_{0,1,0}, \\
 \lambda_1 \varphi_{1,0,1} + g_{1,0,0} 2\varphi_{0,0,2} &= f_{1,0,1} \varphi_{0,0,1} + f_{0,0,2} 2\varphi_{1,0,0} \varphi_{0,0,1}, \\
 2\lambda_2 \varphi_{0,2,0} + g_{0,1,0} \varphi_{0,1,1} &= f_{0,2,0} + f_{0,0,2}(\varphi_{0,1,0})^2, \\
 \lambda_2 \varphi_{0,1,1} + g_{0,1,0} \varphi_{0,0,2} &= f_{0,1,1} \varphi_{0,0,1} + f_{0,0,2} 2\varphi_{0,1,0} \varphi_{0,0,1}, \\
 g_{0,0,2} \varphi_{0,0,1} + g_{0,0,1} 2\varphi_{0,0,2} &= f_{0,0,2}(\varphi_{0,0,1})^2,
 \end{aligned}$$

c'est à dire (car $g_{0,0,1} = g_{0,1,0} = g_{1,0,0} = 0$)

$$\begin{aligned}
 2\lambda_1 \varphi_{2,0,0} &= f_{2,0,0} + f_{0,0,2}(\varphi_{1,0,0})^2 \\
 (\lambda_1 + \lambda_2) \varphi_{1,1,0} &= f_{1,1,0} + f_{1,0,1} \varphi_{0,1,0} + f_{0,1,1} \varphi_{1,0,0} + f_{0,0,2} 2\varphi_{1,0,0} \varphi_{0,1,0} \\
 \lambda_1 \varphi_{1,0,1} &= f_{1,0,1} \varphi_{0,0,1} + f_{0,0,2} 2\varphi_{1,0,0} \varphi_{0,0,1} \\
 2\lambda_2 \varphi_{0,2,0} &= f_{0,2,0} + f_{0,0,2}(\varphi_{0,1,0})^2, \\
 \lambda_2 \varphi_{0,1,1} &= f_{0,1,1} \varphi_{0,0,1} + f_{0,0,2} 2\varphi_{0,1,0} \varphi_{0,0,1}, \\
 g_{0,0,2} \varphi_{0,0,1} + g_{0,0,1} 2\varphi_{0,0,2} &= f_{0,0,2}(\varphi_{0,0,1})^2.
 \end{aligned}$$

Ce système d'équations permet de déterminer les $\varphi_{i,j,k}$ pour $i + j + k = 2$ et $k \neq 2$ alors que $\varphi_{0,0,2}$ est indéterminé. Comme $\varphi_{0,0,1} = 1$ nous obtenons $g_{0,0,2} = f_{0,0,2}$. Supposons que $f_{0,0,p} = 0$ pour tout $p \leq m$ et $f_{0,0,m+1} \neq 0$ nous voyons aisément que l'on peut déterminer tous coefficients $\varphi_{i,j,k}$ pour tout $i + j + k \leq m + 1$ $k \neq m + 1$ et $(i, j, k) \neq (0, 0, k)$ et que

$$g_{0,0,m+1} \varphi_{0,0,1} = f_{0,0,m+1}(\varphi_{0,0,1})^{m+1}$$

et donc

$$g_{0,0,m+1} = f_{0,0,m+1}$$

et on peut prendre $g_{i,j,k} = 0$ pour tout $i + j + k \leq m + 1$ et $(i, j, k) \neq (0, 0, m + 1)$. A l'ordre $m + 2$, pour le terme en z^{m+2} nous obtenons

$$\begin{aligned}
 g_{0,0,m+2} \varphi_{0,0,1} + g_{0,0,m+1} 2\varphi_{0,0,2} \\
 = f_{0,0,m+2}(\varphi_{0,0,1})^{m+2} + f_{0,0,m+1} \varphi_{0,0,2}(m+1)(\varphi_{0,0,1})^m
 \end{aligned}$$

donc

$$(m-1)g_{0,0,m+1}\varphi_{0,0,2} = g_{0,0,m+2}\varphi_{0,0,1} - f_{0,0,m+2}(\varphi_{0,0,1})^{m+2}$$

ce qui nous donne $\varphi_{0,0,2}$ et l'on peut prendre $g_{0,0,m+2} = 0$.

On voit alors aisément que l'on peut calculer, en continuant l'identification, tous les $\varphi_{i,j,k}$. On retombe sur un problème dans la détermination de $\varphi_{0,0,m+1}$. Nous obtenons l'équation:

$$\begin{aligned} g_{0,0,2m+1}\varphi_{0,0,1} + g_{0,0,m+1}(m+1)\varphi_{0,0,m+1} - f_{0,0,m+1}\varphi_{0,0,m+1}(m+1)\varphi_{0,0,1} \\ = (\text{une expression connue par induction}), \end{aligned}$$

comme $g_{0,0,m+1} = f_{0,0,m+1}$ cette équation ne donne pas $\varphi_{0,0,m+1}$ mais détermine $g_{0,0,2m+1}$ et $\varphi_{0,0,m+1}$ est arbitraire de plus $g_{i,j,k} = 0$ pour tout $i+j+k \leq 2m+1$ à l'exception de $g_{0,0,m+1}$ et de $g_{0,0,2m+1}$.

Nous obtenons ainsi

Théorème 2.3. Si $b = 0$, $f_{0,p} = 0$ pour tout $p \leq m$ et $f_{0,m+1} \neq 0$ si de plus $\mathcal{K} = \{(0, \dots, 0)\}$ l'équation (1) est formellement équivalente à une équation de la forme

$$H(A, B, m) \quad \tau z = Az^{m+1} + Bz^{2m+1}$$

où A et B sont des constantes.

Et comme corollaire,

Théorème 2.4. Si $b \in \mathcal{q}^-$ et $b \notin \mathcal{M}$ si de plus $\mathcal{K} = \{(0, \dots, 0)\}$, l'équation (1) est transformable en une équation de la forme

$$E(b, A, B, m) \quad \tau z = z(b + A((x_1)^{m_1^0} \dots (x_p)^{m_p^0} z^q)^m + B((x_1)^{m_1^0} \dots (x_p)^{m_p^0} z^q)^{2m}).$$

Maintenant considérons le cas suivant $\mathcal{K} \neq \{(0, \dots, 0)\}$ et $b = 0$ on suppose que pour tout $p \leq m$, $f_{0,p} = 0$ et $f_{0,m+1} \neq 0$. Rappelons que

$$\mathcal{K} = \{(m_i)_{1 \leq i \leq p} \mid m_i \geq 0 \mid \sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i m_i = 0\},$$

notons $(m_i^0)_{1 \leq i \leq p}$ l'élément différent de zéro et minimal dans \mathcal{K} pour l'ordre indiqué ci-dessus.

Nous avons donc

$$(1) \quad \tau y = \sum_{1 \leq i \leq p} a_i x_i + f^2(x, y)$$

et nous allons chercher une équation aussi simple que possible de la forme

$$(2) \quad \tau z = g(x, z) = \sum_{1 \leq i \leq p} g_i x_i + g_0 z + g^2(x, z)$$

formellement équivalente à (1) par une transformation formelle

$$(3) \quad y = \varphi(x, z) = \sum_{1 \leq i \leq p} \varphi_i x_i + \varphi_0 z + \Phi^2(x, z)$$

donc avec $\varphi_0 \neq 0$. On envisagera également le cas $\varphi_0 = 0$.

L'équation de couplage c'est à dire l'équation dont est solution la transformation formelle si elle existe est:

$$\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i x_i \partial \varphi / \partial x_i + g(x, z) \partial \varphi / \partial z = \sum_{1 \leq i \leq p} a_i x_i + f^2(x, \varphi(x, z)),$$

par identification formelle nous obtenons au début:

$$\lambda_i \varphi_{(i),0} + g_{(i),0} \varphi_{0,\dots,0,1} = a_i \quad i = 1, \dots, n$$

et

$$g_{0,\dots,0,1} \varphi_{0,\dots,0,1} = 0.$$

Si on veut $\varphi_{0,\dots,0,1} \neq 0$ il faut prendre $g_{0,\dots,0,1} = 0$ et par exemple $\varphi_{0,\dots,0,1} = 1$.

Il est facile de voir que l'on peut déterminer de manière unique tous les coefficients $\varphi_{m_1,\dots,m_p,s}$ avec $m_1 + \dots + m_p < m_1^0 + \dots + m_p^0$ et $s \leq m$. Les coefficients de $g(x, z)$ intervenant dans ces formules peuvent être pris arbitrairement, nous les prendrons nuls. En poursuivant l'identification, on peut voir aisément que les coefficients $\varphi_{m_1,\dots,m_p,s}$ avec $(m_1, \dots, m_p) \in \mathcal{K}^* = \mathcal{K} - \{0\}$ sont arbitraires, que $g_{0,m+1} = f_{0,m+1}$ et que l'on détermine alors de manière unique les éléments $g_{m_1,\dots,m_p,s}$ avec $(m_1, \dots, m_p) \in \mathcal{K} - \{0\}$ de plus $g_{0,s} = 0$ pour tout $s \neq m + 1$ et $s \neq 2m \neq 1$. On obtient ainsi le résultat suivant:

Théorème 2.5. Si $b = 0$, $f_{0,p} = 0$ pour tout $p \leq m$ et $f_{0,m+1} \neq 0$ et $\mathcal{K} \neq \{(0, \dots, 0)\}$, l'équation (1) est formellement équivalente à une équation de la forme

$$H(A, B, m) \quad \tau z = Az^{m+1} + Bz^{2m+1} + \sum_{k \geq 0, p \in \mathcal{K}} g_{p,k} x^p z^k$$

avec $g_{0,k} = 0$ pour tout $k \geq 0$ et où A et B sont des constantes.

Etude du cas $f_{0,m} = 0$ pour tout m et $\mathcal{K} = \{(0, \dots, 0)\}$.

L'équation de couplage c'est à dire l'équation dont est solution la transformation formelle si elle existe est:

$$\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i x_i \partial \varphi / \partial x_i + g(x, z) \partial \varphi / \partial z = \sum_{1 \leq i \leq p} a_i x_i + f^2(x, \varphi(x, z)).$$

Par identification des termes en z^p nous voyons facilement que $g_{0,m} = 0$ pour tout m et on constate également que l'on peut prendre $g_{p,q} = 0$ pour tout (p, q) , donc l'équation (1) est formellement équivalente à

$$(2) \quad \tau z = 0,$$

On obtient ainsi

Théorème 2.6. Si $b = 0$, $f_{0,p}^2 = 0$ pour tout p et $\mathcal{K} = \{(0, \dots, 0)\}$, l'équation (1) est formellement équivalente à une équation de la forme

$$(H) \quad \tau z = 0.$$

Etude du cas $f_{0,m} = 0$ pour tout m et $\mathcal{K} \neq \{(0, \dots, 0)\}$.

Rappelons que

$$\mathcal{K} = \{(m_i)_{1 \leq i \leq p} \mid m_i \geq 0, \sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i m_i = 0\},$$

notons $(m_i^0)_{1 \leq i \leq p}$ l'élément différent de zéro et minimal dans \mathcal{K} pour l'ordre indiqué ci-dessus.

Nous avons donc

$$(1) \quad \tau y = \sum_{1 \leq i \leq p} a_i x_i + f^2(x, y)$$

et nous allons chercher une équation aussi simple que possible de la forme

$$(2) \quad \tau z = g(x, z) = \sum_{1 \leq i \leq p} g_i x_i + g_0 z + G^2(x, z)$$

formellement équivalente à (1) par une transformation formelle

$$(3) \quad y = \varphi(x, z) = \sum_{1 \leq i \leq p} \varphi_i x_i + \varphi_0 z + \Phi^2(x, z),$$

donc avec $\varphi_0 \neq 0$. On envisagera également le cas $\varphi_0 = 0$.

L'équation de couplage c'est à dire l'équation dont est solution la transformation formelle si elle existe est:

$$\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i x_i \partial \varphi / \partial x_i + g(x, z) \partial \varphi / \partial z = \sum_{1 \leq i \leq p} a_i x_i + f^2(x, \varphi(x, z)),$$

par identification formelle nous obtenons au début:

$$\lambda_i \varphi_{(i),0} + g_{(i),0} \varphi_{0,\dots,0,1} = a_i, \quad i = 1, \dots, n$$

et

$$g_{0,\dots,0,1} \varphi_{0,\dots,0,1} = 0.$$

Si on veut $\varphi_{0,\dots,0,1} \neq 0$ il faut prendre $g_{0,\dots,0,1} = 0$ et par exemple $\varphi_{0,\dots,0,1} = 1$.

Il est facile de voir que l'on peut déterminer de manière unique tous les coefficients $\varphi_{m_1,\dots,m_p,s}$ avec $m_1 + \dots + m_p < m_1^0 + \dots + m_p^0$. Par contre les équations donnant les $\varphi_{m_1,\dots,m_p,s}$ avec $(m_1, \dots, m_p) \in \mathcal{K}^*$ nous montre que ces coefficients sont arbitraires mais ces équations déterminent tous les coefficients $g_{m_1,\dots,m_p,s}$ avec $(m_1, \dots, m_p) \in \mathcal{K}^*$ et $s \geq 0$. Nous obtenons ainsi

Théorème 2.7. Si $b = 0$, $f_{0,p}^2 = 0$ pour tout p et $\mathcal{K} = \{(0, \dots, 0)\}$, l'équation (1) est formellement équivalente à une équation de la forme

$$\tau z = \sum_{k \geq 0, m \in \mathcal{K}} g_{m,k} x^m z^k$$

avec $g_{0,k} = 0$ pour tout $k \geq 0$.

Quatrième cas $b \in \mathcal{M}$ et $b \neq 0$.

Donc $b = \sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i m_i^0$. Supposons $\mathcal{K} = \{(0, \dots, 0)\}$. Regardons l'équation de couplage

$$\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i x_i \partial \varphi / \partial x_i + g(x, z) \partial \varphi / \partial z = \sum_{1 \leq i \leq p} a_i x_i + b \varphi + f_2(x, \varphi(x, z))$$

par identification en degré 1 nous voyons facilement que tous les $\varphi_{(i),0}$ sont entièrement déterminés et que

$$g_{0,\dots,0,1} \varphi_{0,\dots,0,1} = b \varphi_{0,\dots,0,1},$$

comme nous cherchons une transformation φ inversible il faut prendre $\varphi_{0,\dots,0,1} = 1$ ce qui donne $g_{0,\dots,0,1} = b$. En poursuivant l'identification on constate que tous les $\varphi_{m_1,\dots,m_p,p}$ pour $p \neq 0$ sont déterminés de manière unique quelque soit le choix des $g_{m_1,\dots,m_p,p}$, il y a une indétermination pour le calcul de $\varphi_{m_1^0,\dots,m_p^0,0}$ mais l'équation correspondante détermine $g_{m_1^0,\dots,m_p^0,0}$. En définitive l'équation (1) est équivalente à

$$\tau z = bz + g_{m_1^0,\dots,m_p^0,0} (x_1)^{m_1^0} (x_2)^{m_2^0} \dots (x_p)^{m_p^0}.$$

Supposons $\mathcal{X} \neq \{(0, \dots, 0)\}$. Dans ce cas il est facile de voir que (1) est équivalente à

$$\tau z = bz + \sum_{r \in \mathcal{X}} g_{m_1^0+r_1,\dots,m_p^0+r_p,0} (x_1)^{m_1^0+r_1} (x_2)^{m_2^0+r_2} \dots (x_p)^{m_p^0+r_p}.$$

Théorème 2.8. Si $b \in \mathcal{M}$ et $b \neq 0$ l'équation (1) est formellement équivalente à

$$\tau z = bz + g_{m_1^0,\dots,m_p^0,0} (x_1)^{m_1^0} (x_2)^{m_2^0} \dots (x_p)^{m_p^0}$$

si $\mathcal{X} = \{(0, \dots, 0)\}$, et à

$$\tau z = bz + \sum_{r \in \mathcal{X}} g_{m_1^0+r_1,\dots,m_p^0+r_p,0} (x_1)^{m_1^0+r_1} (x_2)^{m_2^0+r_2} \dots (x_p)^{m_p^0+r_p}$$

si $\mathcal{X} \neq \{(0, \dots, 0)\}$.

§ 3. Intégration formelle des réduites formelles

Il n'est pas possible pour toutes les réduites formelles d'en donner les solutions formelles nous allons seulement donner les solutions des réduites pour lesquelles nous avons eu la possibilité de les trouver.

En ce qui concerne les solutions fonctions nous les étudierons dans le § 4.

La réduite formelle est

$$\tau z = 0$$

dont les solutions sont

$$z = h((x_1)^{\lambda_2} (x_2)^{-\lambda_1}, (x_1)^{\lambda_3} (x_3)^{-\lambda_1}, \dots, (x_1)^{\lambda_p} (x_p)^{-\lambda_1})$$

où $h(t_2, \dots, t_p)$ est une fonction différentiable arbitraire ou une série formelle

ou convergente arbitraire. On détermine alors facilement par identification une transformation formelle $\varphi(x, z)$ qui transforme (1) en (2). Les solutions formelles de (1) sont donc données par

$$y = \varphi(x, h((x_1)^{1/\lambda_1}(x_2)^{-1/\lambda_2}, \dots, (x_1)^{1/\lambda_1}(x_p)^{-1/\lambda_p})).$$

La réduite formelle est de la forme

$$\tau z = a, \quad a \in \mathbb{C}^*.$$

On peut évidemment supposer qu'un des scalaires λ_i est non nul par exemple λ_1 . On voit alors facilement en cherchant des intégrales premières du système des caractéristiques de cette équation que ses solutions sont de la forme

$$z = (a/\lambda_1) \text{Log } x_1 + h((x_1)^{\lambda_2}(x_2)^{-\lambda_1}, (x_1)^{\lambda_3}(x_2)^{-\lambda_1}, \dots, (x_1)^{\lambda_p}(x_p)^{-\lambda_1})$$

où $h(u_2, \dots, u_p)$ est une fonction différentiable arbitraire des ses arguments.

On détermine alors facilement par identification une transformation formelle $\varphi(x, z)$ qui transforme (1) (lorsque $F(0, 0) \neq 0$) en (2) (avec $a = F(0, 0)$). Les solutions formelles de (1) sont donc données par

$$y = \varphi(x, (F(0, 0)/\lambda_1) \text{Log } x_1 + h((x_1)^{\lambda_2}(x_2)^{-\lambda_1}, (x_1)^{\lambda_3}(x_2)^{-\lambda_1}, \dots, (x_1)^{\lambda_p}(x_p)^{-\lambda_1})).$$

La réduite formelle est

$$\tau z = bz, \quad b \notin \mathcal{M}, \quad b \notin \mathcal{q}^- \quad \text{et} \quad b \neq 0,$$

nous allons intégrer cette équation en utilisant la méthode classique des intégrales premières du système des caractéristiques. Le système des caractéristiques est:

$$dx_1/\lambda_1 x_1 = dx_2/\lambda_2 x_2 \dots = dx_p/\lambda_p x_p = dz/bz,$$

nous avons les intégrales premières:

$$(x_1)^{1/\lambda_1} = C_1(x_2)^{1/\lambda_2}, \dots, (x_1)^{1/\lambda_1} = C_p(x_p)^{1/\lambda_p} \quad \text{et} \quad z = k(x_1)^{b/\lambda_1}$$

et les solutions formelles sont données par

$$z = (x_1)^{b/\lambda_1} h((x_1)^{1/\lambda_1}(x_2)^{-1/\lambda_2}, \dots, (x_1)^{1/\lambda_1}(x_p)^{-1/\lambda_p})$$

où $h(u_2, \dots, u_p)$ est une série formelle arbitraire ou une fonction de classe C^1 arbitraire.

La réduite formelle est

$$\tau y = Ay^{m+1} + By^{2m+1}.$$

Dans le cas $\tau = xd/dx$ c'est l'équation de Hukuhara qui définit la fonction de Hukuhara. Dans notre cas où τ est un champ de vecteurs semi-simple sous forme normale essayons d'étudier les solutions de cette équation.

Posons $z = y^{-m}$ donc $y = z^{-1/m}$ il vient facilement

$$\tau z = -Am - Bm/z$$

en posant pour tout $i = 1, \dots, p$

$$x_i = e^{(-B/mA^2)X_i} \quad \text{et} \quad z = (B/A)Y,$$

nous obtenons

$$\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i \partial Y / \partial X_i = 1 + 1/Y$$

c'est à dire

$$\sum_{1 \leq i \leq p} (\lambda_i \partial Y / \partial X_i) Y = Y + 1,$$

cette équation aux dérivées partielles peut s'intégrer par la méthode des caractéristiques. Le système des caractéristiques est

$$dX_1 / \lambda_1 Y = dX_2 / \lambda_2 Y = \dots = dX_p / \lambda_p Y = dY / (Y + 1),$$

dont nous avons les intégrales premières

$$\lambda_i X_1 = \lambda_1 X_i + C_i \quad i = 2, \dots, p$$

et

$$X_1 = \lambda_1 (Y - \text{Log}(Y + 1)) + C,$$

il en résulte que la solution générale formelle est de la forme

$$X_1 / \lambda_1 + h(\lambda_2 X_1 - \lambda_1 X_2, \lambda_3 X_1 - \lambda_1 X_3, \dots, \lambda_p X_1 - \lambda_1 X_p) = Y - \text{Log}(Y + 1)$$

où $h(y_2, \dots, y_p)$ est une fonction différentiable ou une série formelle ou une série convergente si on s'intéresse aux solutions formelles ou aux solutions holomorphes.

Si nous sommes dans le cas d'une variable et $\tau = xd/dx$ nous sommes réduit à

$$X + C = Y - \text{Log}(Y + 1),$$

dont la solution est la fonction de Hukuhara $H(A, B, X + C)$ ([2]). Il en résulte que les solutions de notre équation aux dérivées partielles sont de la forme

$$H(A, B, X_1 / \lambda_1 + h(\lambda_2 X_1 - \lambda_1 X_2, \lambda_3 X_1 - \lambda_1 X_3, \dots, \lambda_p X_1 - \lambda_1 X_p))$$

où $h(y_2, \dots, y_p)$ est une série formelle arbitraire.

La réduite formelle est de la forme

$$\tau z = z(b + A((x_1)^{m_1^0} \dots (x_p)^{m_p^0} z^q)^m + B((x_1)^{m_1^0} \dots (x_p)^{m_p^0} z^q)^{2m})$$

en posant $u = (x_1)^{m_1^0} \dots (x_p)^{m_p^0} z^q$, nous obtenons

$$\tau u = (\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i m_i^0) (x_1)^{m_1^0} \dots (x_p)^{m_p^0} z^q + q(x_1)^{m_1^0} \dots (x_p)^{m_p^0} z^q [b + Au^m + Bu^{2m}]$$

donc

$$\tau u = qu[Au^m + Bu^{2m}]$$

dont la solution est

$$H(qA, qB, X_1/\lambda_1 + h(\lambda_2 X_1 - \lambda_1 X_2, \lambda_3 X_1 - \lambda_1 X_3, \dots, \lambda_p X_1 - \lambda_1 X_p))$$

avec les mêmes notations que ci-dessus.

La réduite formelle est de la forme

$$\tau z = bz + g_{m^0}(x_1)^{m_1^0} \dots (x_p)^{m_p^0},$$

on peut supposer que $\lambda_1 \neq 0$ et on voit facilement que

$$g_{m^0}(x_1)^{m_1^0} \dots (x_p)^{m_p^0} \text{Log } x_1/\lambda_1$$

est une solution particulière de cette équation et la solution générale formelle est donnée par

$$z = g_{m^0}(x_1)^{m_1^0} \dots (x_p)^{m_p^0} \text{Log } x_1/\lambda_1 + (x_1)^{b/\lambda_1} h((x_1)^{1/\lambda_1} (x_2)^{-1/\lambda_2}, \dots, (x_1)^{1/\lambda_1} (x_p)^{-1/\lambda_p}).$$

La réduite formelle est

$$\tau z = bz + \sum_{r \in \mathcal{X}} g_{m_1^0+r_1, \dots, m_p^0+r_p, 0} (x_1)^{m_1^0+r_1} (x_2)^{m_2^0+r_2} \dots (x_p)^{m_p^0+r_p}$$

et la solution formelle est:

$$z = (\sum_{r \in \mathcal{X}} g_{m_1^0+r, \dots, m_p^0+r} (x_1)^{m_1^0+r} \dots (x_p)^{m_p^0+r}) \text{Log } x_1/\lambda_1 + (x_1)^{b/\lambda_1} h((x_1)^{1/\lambda_1} (x_2)^{-1/\lambda_2}, \dots, (x_1)^{1/\lambda_1} (x_p)^{-1/\lambda_p}).$$

§4. Etude analytique et intégration

§4.1. Cas $b \notin \mathcal{M}$, et $b \notin \varphi^-$

Nous savons d'après le §2 que l'équation

$$(1) \quad \tau y = f(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq p} a_i x_i + by + f_2(x, y) \quad \text{avec} \quad f(0, 0) = 0$$

est formellement équivalente à

$$(1') \quad \tau z = bz$$

par une transformation formelle $y = \varphi(x, z)$ solution de

$$(2) \quad \tau\varphi = \sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i x_i \partial\varphi/\partial x_i + bz\partial\varphi/\partial z = \sum_{1 \leq i \leq p} a_i x_i + b\varphi + f_2(x, \varphi(x, z)).$$

Avec le Théorème 1.1, nous obtenons

Théorème 4.1.1. *Si $b \notin \mathcal{M}$ et $b \notin \varphi^-$ et si le champ de vecteurs*

$$\tau^* = \sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i x_i \partial/\partial x_i + bz\partial/\partial z$$

vérifie une condition de Poincaré ou de Siegel, l'équation (1) est analytiquement équivalente à

$$(1') \quad \tau z = bz.$$

De plus la transformation qui transforme (1) en (1') est unique.

§4.1.1. Résolution de l'équation

$$(1') \quad \tau z = bz.$$

Le système des caractéristiques de cette équation est

$$dx_1/\lambda_1 x_1 = dx_2/\lambda_2 x_2 = \dots = dx_p/\lambda_p x_p = dz/bz,$$

nous avons les intégrales premières

$$(x_1)^{\lambda_1} (x_i)^{-\lambda_i} = C_i \quad i = 2, \dots, p \quad \text{et} \quad (z)^{\lambda_1} (x_1)^{-b} = C_0.$$

Donc les solutions de (1') sont données par

$$z = (x_1)^{b/\lambda_1} h((x_1)^{\lambda_2} (x_2)^{-\lambda_2}, \dots, (x_1)^{\lambda_p} (x_p)^{-\lambda_p})$$

où $h(t_2, \dots, t_p)$ est fonction holomorphe arbitraire de t_2, \dots, t_p . Les solutions formelles de (1) sont donc données par

$$y = \sum_{1 \leq i \leq p} \varphi_{(i),0} x_i + z + \varphi_2(x, z)$$

avec

$$z = (x_1)^{b/\lambda_1} h((x_1)^{\lambda_2} (x_2)^{-\lambda_2}, \dots, (x_1)^{\lambda_p} (x_p)^{-\lambda_p}),$$

la série $\varphi_2(x, z)$ étant convergente pour

$$|x_i| \leq R \quad \text{et} \quad |z| \leq \varrho.$$

Pour obtenir des solutions de (1) il faut donc que

$$|(x_1)^{b/\lambda_1} h((x_1)^{\lambda_2} (x_2)^{-\lambda_2}, \dots, (x_1)^{\lambda_p} (x_p)^{-\lambda_p})| \leq \varrho,$$

ceci est par exemple le cas si $h(t)$ est une fonction bornée et si $\lim_{x_1 \rightarrow 0} (x_1)^{b/\lambda_1} = 0$ ou bien encore si

$$|(x_1)^{b/\lambda_1}(x_1)^{\lambda_2}(x_2)^{-\lambda_1}h^*((x_1)^{\lambda_2}(x_3)^{-\lambda_1}, \dots, (x_1)^{\lambda_p}(x_p)^{-\lambda_1})| \leq \varrho$$

où $h^*(t')$ est une fonction bornée et

$$\text{Lim}_{|x| \rightarrow 0} (x_1)^{b/\lambda_1}(x_1)^{\lambda_2}(x_2)^{-\lambda_1} = 0.$$

On peut trouver bien d'autres conditions.

Nous obtenons ainsi toute une classe de fonctions solutions de (1) par exemple

$$y = \sum_{1 \leq i \leq p} \varphi_{(i),0} x_i + z + \varphi_2(x, z)$$

avec

$$z = (x_1)^{b/\lambda_1} h((x_1)^{\lambda_2}(x_2)^{-\lambda_1}, \dots, (x_1)^{\lambda_p}(x_p)^{-\lambda_1}).$$

Ces divers cas méritent une discussion détaillée.

Nous avons choisi $\varphi_{0,\dots,0,1} = 1$, il était également possible de prendre $\varphi_{0,\dots,0,1} = 0$ dans ce cas on obtient pour solution la solution holomorphe du Théorème 1.1.

§ 4.2. Cas $b \notin \mathcal{M}$ et $b \in \varphi^-$ et $b \neq 0$

Nous savons d'après le § 2 que l'équation

$$(1) \quad \tau y = f(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq p} a_i x_i + by + f_2(x, y) \quad \text{avec} \quad f(0, 0) = 0$$

est formellement équivalente à une équation de la forme

$$(1') \quad \tau z = bz + zh((x_1)^{m_1^0}, \dots, (x_p)^{m_p^0}(z)^q) \quad \text{si} \quad \mathcal{X} = \{(0, \dots, 0)\},$$

où $b = -(\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i m_i^0)/q$ et la fonction $h(u)$ une série formelle bien déterminée vérifiant $h(0) = 0$. Dans ce cas il ne faut pas espérer trouver en général une transformation convergente transformant (1) en (1') et de plus on ne sait pas si la série $h(u)$ est convergente. C'est un cas qui mérite une étude plus élaborée.

Et si $\mathcal{X} \neq \{(0, \dots, 0)\}$ à une équation de la forme

$$\tau z = bz + z \sum_{r \in \mathcal{X}} h((x_1)^{m_1^0+r_1}, \dots, (x_p)^{m_p^0+r_p}(z)^q)$$

par la transformation $u = (x_1)^{m_1^0}, \dots, (x_p)^{m_p^0}(z)^q$ l'équation se transforme

$$\text{si} \quad \mathcal{X} = \{(0, \dots, 0)\} \quad \text{en} \quad \tau u = quh(u)$$

et si $\mathcal{X} \neq \{(0, \dots, 0)\}$ en

$$\tau u = qu[\sum_{r \in \mathcal{X}} h_{(r)}((x_1)^{r_1}, \dots, (x_p)^{r_p}u)]$$

dans les deux cas nous sommes ramenés au cas $b = 0$ et dans ce cas on ne peut pas espérer avoir des résultats significatifs dans le cadre analytique comme le montre déjà le cas d'une variable.

References

- [1] Gérard, R., Etude des solutions des équations différentielles de la forme $xy' = f(x, y)$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. IA, **36** (1989), 729–752.
- [2] Hukuhara, M., Kimura, T. and Matuda, T., *Equations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe*, Publications of the Mathematical Society of Japan, 1961.
- [3] Kaplan, S., Formal and convergent power series solutions of singular partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., **256** (1979), 163–183.
- [4] Bengel, G. et Gérard, R., Formal and convergent solutions of singular partial differential equations, Manuscripta Math. (1982), 343–373.
- [5] Gérard, R. and Tahara, H., Formal, holomorphic and singular solutions of non linear singular partial differential equations, Book in the form of a preprint of I.R.M.A. of Strasbourg (Alsace).
- [6] Gérard, R. and Sibuya, Y., Convergent power series solutions of a non linear partial differential equation, to appear in Analysis.
- [7] Charrière, H., Une équation aux dérivées partielles avec petits dénominateurs (C.R.A.S. Paris T.297 (1983)).
- [8] Charrière, H., Une équation aux dérivées partielles avec petits dénominateurs, Colloque Franco-Japonais, vol. III, 35–72, I.R.M.A. Strasbourg, 1985.
- [9] Charrière, H., Une généralisation du Théorème de Siegel, Kumamoto J. Math., **7** (1994), 1–26.

nuna adreso:

I.R.M.A.
Université Louis Pasteur
10 rue du Général Zimmer
67080 Strasbourg (Alsace)
France

(Ricevita la 27-an de januaro, 1994)