Funkcialaj Ekvacioj, **32** (1989) 67–80

Caractérisation des Connexions Singulières Régulières le Long d'un Diviseur à Croisements Normaux

By

K. Betina
(U. S. T. H. B., Algéria)

Introduction

Soient $\mathcal{O}_f$ l'anneau des germes en $0 \in \boldsymbol{C}^n$ de fonctions méromorphes le long du diviseur $f = x_1 \dots x_d$ $(d \leq n)$, Ω_f^1 l'espace vectoriel des 1-formes différentielles à coefficients dans $\mathcal{O}_f$ et

$$\nabla: \mathcal{O}_f^N \to \mathcal{O}_f^N \otimes_{\mathcal{O}_f} \Omega_f^1 \qquad (N \in \boldsymbol{N})$$

une connexion linéaire complétement intégrable.

Dans le cas $n = 1$, Malgrange et Gérard-Levelt définissent respectivement l'irrégularité $i(\nabla)$ et le premier invariant $\rho_1(\nabla)$ de la connexion ∇ et démontrent que ces nombres sont nuls si, et seulement si, la connexion ∇ est singuliére régulière à l'origine (c.f. [2] et [3]).

Dans ce travail, on généralise, pour n quelconque, la définition de l'irrégularité $i(\nabla)$ de Malgrange ainsi que celle du premier invariant de Gérard-Levelt de la connexion ∇ et on démontre les résultats suivants:

1) $i(\nabla) = \rho_1(\nabla)$ et on donne une méthode explicite pour calculer ces nombres à partir de la matrice de ∇ dans une $\mathcal{O}_f$-base quelconque.

2) si $i(\nabla) = 0$ et ∇u converge avec $u \in \hat{\mathcal{O}}_f^N$, alors $u \in \mathcal{O}_f^N$ où $\hat{\mathcal{O}}_f$ (resp. $\mathcal{O}_f$) désigne le localisé de $\boldsymbol{C}[[x_1, x_2]]$ (resp. $\boldsymbol{C}\{x_1, x_2\}$) en $x_1 x_2$.

3) Soit U un ouvert connexe de $\boldsymbol{C}^2$ et soient $Y \subset U$ un diviseur à croisements normaux, V un fibré vectoriel analytique sur $U - Y$, méromorphe le long de Y et ∇ une connexion sur V.

Si $i(\nabla)$ désigne l'irrégularité de ∇ à l'origine de $\boldsymbol{C}^2$ et Y l'ensemble des points (x_1, x_2) de $\boldsymbol{C}^2$ tels que $x_1 x_2 = 0$, alors: $i(\nabla) = 0$ si, et seulement si, pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage ouvert ω de y et une base de V sur $\omega - Y$, méromorphe le long de Y, telle que la matrice de la connexion ∇ présente au pis un pôle logarithmique le long de Y.

I. Cas formel

Notations.

$\mathcal{O}_{(i)} = \boldsymbol{C}[[x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]]$ l'anneau des séries formelles à $(n-1)$ indéter-

minées $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ à coefficients dans $\boldsymbol{C}$.
K_i = le corps des fractions de l'anneau $\mathcal{O}_{(i)}$.
$K_{(i)} = K_i[[x_i]]$ l'anneau des séries formelles à une indéterminée x_i à coefficients dans K_i.
L_i = le corps des fractions de l'anneau $K_{(i)}$ muni de la valuation discréte V_i.

Soit $D = \sum_{p=0}^{m} a_p \partial_i^p$ un opérateur différentiel, avec $a_j \in K_{(i)}$ pour $j = 1, \ldots, m$, $a_m \neq 0$ et $\partial_i = \partial/\partial x_i$. L'application $D\colon K_{(i)} \to K_{(i)}$ est K_i-linéaire, soit

$$\chi(D, K_{(i)}) \overset{\text{déf}}{=} \dim_{K_i} \operatorname{Ker} D - \dim_{K_i} \operatorname{coker} D$$

son indice.

On va d'abord généraliser trois résultats de B. Malgrange (c.f. [3]).

Proposition I.1.

$$\chi(D, K_{(i)}) = \sup_{0 \leq p \leq m} (p - \mathscr{V}_i(a_p)) .$$

Preuve. Posons $\alpha = \sup_{0 \leq p \leq m} (p - V_i(a_p))$, pour tout p, $a_p = x_i^{p-\alpha} b_p$ avec $b_p \in K_{(i)}$ et b_p inversible dans $K_{(i)}$ pour les $p \in P = \{p | p - V_i(a_p) = \alpha\}$. Soit $k \in \boldsymbol{N}$, $k \geq m$, on a

$$a_p \frac{\partial^p}{\partial x_i^p} x_i^k = k(k-1)\ldots(k-p+1) b_p^0 x_i^{k-\alpha} + (\text{termes de valuation} > k - \alpha)$$

où b_p^0 est le premier terme de la série représentant b_p, d'où

$$D(x_i^k) = \sum_{p \in P} k(k-1)\ldots(k-p+1) b_p^0 x_i^{k-\alpha} + (\text{termes de valuation} > k - \alpha) .$$

Pour $p \in P$, b_p^0 est $\neq 0$ et s'écrit sous la forme $b_p^0 = \alpha_p/\beta_p$ avec α_p, $\beta_p \in \mathcal{O}_{(i)} - \{0\}$; en réduisant les b_p^0 au même dénominateur (pour $p \in P$), on obtient:

$$\sum_{p \in P} k(k-1)\ldots(k-p+1) b_p^0 x_i^{k-\alpha} = \frac{1}{g} \sum_{p \in P} k(k-)\ldots(k-p+1) f_p x_i^{k-\alpha}$$

où f_p et $g \in \mathcal{O}_{(i)} - \{0\}$ avec

$$f_p = \sum_{v' \in \boldsymbol{N}^{n-1}} a_{v'}^p x_1^{v'_1} \ldots x_{i-1}^{v'_{i-1}} x_{i+1}^{v'_{i+1}} \ldots x_n^{v'_n}$$

où $v' = (v'_1, \ldots, v'_{i-1}, v'_{i+1}, \ldots, v'_n)$ et $a_{v'}^p \in \boldsymbol{C}$.

Soit $q = \sup P$; puisque $f_q \neq 0$, il existe $v' \in \boldsymbol{N}^{n-1}$ tel que $a_{v'}^q \neq 0$, mais $\sum_{p \in P} a_{v'}^p k(k-1)\ldots(k-p+1)$ est un polynôme en k dont le terme dominant est $a_{v'}^q k^q$, donc ne s'annule pas pour k assez grand, disons $k \geq k_0$, par suite

$$\sum_{p \in P} k(k-1)\ldots(k-p+1) b_p^0 \neq 0 \qquad \text{pour} \qquad k \geq k_0 .$$

De là, on déduit par un calcul de récurrence sur les coefficients que pour $k \geq k_0$ et $g \in K_{(i)}$ donné, avec $V_i(g) \geq k - \alpha$, il existe un unique $f \in K_{(i)}$ vérifiant $V_i(f) \geq k$ et $p(f) = g$. Donc, en désignant par m_i l'idéal maximal de $K_{(i)}$, on a un isomorphisme $D\colon m_i^k \xrightarrow{\sim} m_i^{k-\alpha}$ $(k \geq k_0)$ et la proposition résulte immédiatement du diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & m_i^k \arrow[r, "i"] \arrow[d, "D"'] & K_{(i)} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "D"'] & K_{(i)}/m_i^k \arrow[r] \arrow[d, "D"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & m_i^{k-\alpha} \arrow[r, "i"] & K_{(i)} \arrow[r, "\pi"] & K_{(i)}/m_i^{k-\alpha} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où la première flèche verticale est d'indice nul.

Soit $D = x_i\partial/\partial x_i - M$ avec $M \in \operatorname{End}(L_i^N)$, rappelons que 0 est un point singulier régulier de $D\colon L_i^N \to L_i^N$, si, et seulement si, il existe $A \in GL(N, L_i)$ telle que

$$A^{-1}MA - x_iA^{-1}\frac{\partial}{\partial x_i}A \in \operatorname{End}(K_{(i)}^N).$$

Soient Λ_1 et Λ_2 deux réseaux dans L_i^N tels que $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ et $D\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, et $\chi(D; \Lambda_1, \Lambda_2) = \dim_{K_i} \operatorname{Ker} D - \dim_{K_i} \operatorname{coker} D$ l'indice de l'opérateur $D\colon \Lambda_1 \to \Lambda_2$.

Proposition I.2. *L'application $D\colon \Lambda_1 \to \Lambda_2$ est d'indice fini et le nombre $i(D) = \chi(D; \Lambda_1, \Lambda_2) + \dim_{K_i} \Lambda_2/\Lambda_1$ est indépendant du couple de réseaux (Λ_1, Λ_2) vérifiant $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, $D\Lambda_1 \subset \Lambda_2$.*

Definition. Le nombre $i(D)$ est appelé l'irrégularité de D en 0.

Proposition I.3. $i(D) = 0 \Leftrightarrow$ *l'origine est un point singulier régulier de D.*

Pour les preuves de ces deux dernières propositions, il suffit de recopier les démonstrations de Malgrange ([3]) en remplaçant $\boldsymbol{C}$ par K_i.

Soit $D = x_i^{1+\ell}\partial/\partial x_i + M$, avec $M \in \operatorname{End}(K_{(i)}^N)$ et $\ell \in \boldsymbol{N}$; d'après la proposition I.2, on a

$$\chi(D; K_{(i)}^N) < +\infty, \text{ donc } \dim_{K_i} \operatorname{Ker}(D\colon K_{(i)}^N \to K_{(i)}^N) < +\infty,$$

par suite $\operatorname{Ker}(D\colon x_i^kK_{(i)}^N \to K_{(i)}^N) = 0$ pour k assez grand.

Du diagramme commutatif (pour k assez grand)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & x_i^kK_{(i)}^N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "D"] & K_{(i)}^N \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "D"'] & K_{(i)}^N/x_i^kK_{(i)}^N \arrow[r] \arrow[d, "D"] & 0 \\
0 \arrow[r] & D(x_i^kK_{(i)}^N) \arrow[r, "i"] & K_{(i)}^N \arrow[r, "\pi"] & K_{(i)}^N/D(x_i^kK_{(i)}^N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où la première flèche verticale est bijective, on déduit que

$$(*) \qquad \dim_{K_i} (K_{(i)}^N / D(x_i^k K_{(i)}^N)) < +\infty$$

et

$$(**) \qquad \chi(D; K_{(i)}^N) = Nk - \dim_{K_i} K_{(i)}^N / D(x_i^k K_{(i)}^N) .$$

Soit ℓ_j^k $(1 \leq j \leq N)$ l'ordre de l'idéal dans $K_{(i)}$ des j-èmes composantes des vecteurs dans $D(x_i^k K_{(i)}^N)$ dont les $(j+1)$-èmes, $\ldots$, N-ièmes composantes sont nulles.

En utilisant l'inégalité $(*)$ et un calcul de récurrence, on trouve:

$$\ell_j^k = k + \ell_j \quad \text{avec} \quad \ell_j \in \boldsymbol{Z} \qquad (1 \leq j \leq N) .$$

Les nombres ℓ_j^k sont construits comme suit: si on pose $D = (p_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq N}$, $M = (m_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq N}$ avec $p_{\alpha\alpha} = x_i^{1+\ell} \partial/\partial x_i + m_{\alpha\alpha}$ $(1 \leq \alpha \leq N)$, $p_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta}$ pour $\alpha \neq \beta$ $(1 \leq \alpha, \beta \leq N)$ alors pour k assez grand, disons $k \geq k_1$, l'opérateur différentiel $p_{\alpha\beta}: x_i^k K_{(i)} \to x_i^{k-n_{\alpha\beta}} K_{(i)}$, où $n_{\alpha\beta} = \chi(p_{\alpha\beta}, K_{(i)})$, est un isomorphisme pour tout couple (α, β) tel que $p_{\alpha\beta} \neq 0$ (cf. la preuve de la proposition I.1) et on a

$$\ell_N^k = \inf_{f_j \in K_{(i)}} \left\{ V_i\left(\sum_{j=1}^N p_{Nj}(f_j x_i^k) \right) \right\} = \inf_{1 \leq j \leq N} \{k - n_{Nj}\} < +\infty .$$

Soit j_1 tel que $\ell_N^k = k - n_{Nj_1}$, alors

$$\ell_{N-1}^k = \inf_{f_j \in K_{(i)}, j \neq j_1} \{ V_i((p_{N-1,j} - p_{N-1,j_1} \circ p_{N,j_1}^{-1} \circ p_{N,j}) f_j x_i^k) \}$$

et $\ell_{N-1}^k < +\infty$ d'après la relation $(*)$.

Soit $j_2 \neq j_1$ tel que

$$\ell_{N-1}^k = V_i((p_{N-1,j_2} - p_{N-1,j_1} \circ p_{N,j_1}^{-1} \circ p_{N,j_2}) x_i^k).$$

Posons $(p_{N-1,j_2} - p_{N-1,j_1} \circ p_{N,j_1}^{-1} \circ p_{N,j_2}) x_i^k = \alpha_0(k) + \alpha_1(k) x_i + \alpha_2(k) x_i^2 + \cdots$ où les $\alpha_j(k)$ sont des polynômes en k à coefficients dans K_i et soit $\ell_{N-1} = \inf\{a \in \boldsymbol{Z}; \alpha_{K+a}(k)$ ne soit pas identiquement nul$\}$. Pour k assez grand, disons $k \geq k_2$, le polynôme $\alpha_{k+\ell_{N-1}}(k)$ ne s'annule pas et on a

$$\ell_{N-1}^k = k + \ell_{N-1} .$$

En reprenant plusieurs fois les mêmes arguments, on obtient

$$(***) \qquad \ell_j^k = k + \ell_j \qquad (1 \leq j \leq N) , \quad \text{avec} \quad \ell_j \in \boldsymbol{Z}$$

et

$$D(U x_i^k) = \begin{pmatrix} x_i^{\ell_1^k} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & x_i^{\ell_N^k} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad U \in GL(N, K_{(i)}) .$$

Il est facile de vérifier que la famille $\psi_{\alpha\beta} = {}^t(0, \ldots, 0, x_i^\beta, 0, \ldots, 0)$ où x_i^β est à la α-ième place $(1 \leq \alpha \leq N)$ et β varie de 0 à $\ell_\alpha^k - 1$, forme une base d'un espace supplémentaire de $D(x_i^k K_{(i)}^N)$ dans $K_{(i)}^N$.

En utilisant les relations (∗∗) et (∗∗∗) on obtient la

Proposition I.4.

$$\chi(D; K_{(i)}^N) = -\sum_{j=1}^{N} \ell_j .$$

Soit $D = x_i \partial/\partial x_i + M: L_i^N \to L_i^N$ avec $M \in \mathrm{End}\,(L_i^N)$. On choisit $\ell \in N$ tel que $x_i^\ell M \in \mathrm{End}\,(K_{(i)}^N)$ et on construit les nombres ℓ_j $(1 \leq j \leq N)$ comme précédemment, on obtient alors

Theoreme I.5.

$$i(D) = \ell N - \sum_{j=1}^{N} \ell_j .$$

Preuve. En prenant les réseaux $\Lambda_1 = K_{(i)}^N$ et $\Lambda_2 = x_i^{-\ell} K_{(i)}^N$, on a

$$i(D) = \chi(D; \Lambda_1, \Lambda_2) + \ell N .$$

Pour établir le théorème, il suffit donc de montrer que

$$\chi(D; \Lambda_1, \Lambda_2) = -\sum_{j=1}^{N} \ell_j .$$

D'après la proposition I.4, on a

$$\chi(x_i^\ell D; K_{(i)}^N) = -\sum_{j=1}^{N} \ell_j \tag{1}$$

or

$$\chi(x_i^\ell D; K_{(i)}^N, x_i^{-\ell} K_{(i)}^N) = \chi(D; K_{(i)}^N, x_i^{-\ell} K_{(i)}^N) - \ell N \tag{2}$$

car l'application:
$$\begin{aligned} x_i^{-\ell} K_{(i)}^N &\to K_{(i)}^N \\ f &\mapsto x_i^\ell f \end{aligned}$$

est injective et de codimension égale à ℓN, et

$$\begin{aligned} \chi(x_i^\ell D; K_{(i)}^N, x_i^{-\ell} K_{(i)}^N) &= \chi(x_i^\ell D, K_{(i)}^N) - \ell N \\ &= -\sum_{j=1}^{N} \ell_j - \ell N \qquad \text{(d'après (1))} \end{aligned} \tag{3}$$

d'où

$$\chi(D; K^N_{(i)}, x_i^{-\ell} K^N_{(i)}) = \chi(x_i^\ell D; K^N_{(i)}, x_i^{-\ell} K^N_{(i)}) + \ell N \qquad \text{(d'après (2))}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \ell_j - \ell N + \ell N \qquad \text{(d'après (3))}$$

$$= -\sum_{j=1}^{N} \ell_j .$$

Considérons maintenant un opérateur différentiel $D = x_i \partial/\partial x_i + A$, avec $A \in \mathrm{End}\,(L_i^N)$ et un vecteur $v \in L_i^N$ cyclique pour D, c'est-à-dire un vecteur $v \in L_i^N$ tel que la famille $(v, Dv, \ldots, D^{N-1}v)$ soit une base de L_i^N. Rappelons que si on pose $D^N v = \sum_{j=0}^{N-1} a_j D^j v$, où $a_j \in L_i$ $(0 \le j \le N-1)$, le premier invariant $\rho_1(D)$ de Gérard-Levelt de D est donné par

$$\rho_1(D) = \sup\left(0, \sup_{0 \le j \le N-1} (-V_i(a_j))\right) \qquad \text{(c.f. [2])} .$$

Proposition I.6

$$i(D) = \rho_1(D) .$$

Preuve. Si 0 est un point singulier régulier de D, $i(D) = \rho_1(D) = 0$ d'après la proposition I.3 et [2].

Supposons que 0 est un point singulier irrégulier, c'est-à-dire que $i(D)$ et $\rho_1(D)$ sont non nuls et soit $j_0 \in [0, N-1]$ tel que $\rho_1(D) = \rho_1 = -V_i(a_{j_0})$. Dans la base $(v, \ldots, D^{j_0-1}v, D^{N-1}v, D^{j_0+1}v, \ldots, D^{N-2}v, D^{j_0}v)$, la matrice de l'opérateur différentiel D est

$$M(D,(v)) = \begin{bmatrix}
0 & 0 & & 0 & 0 & a_0 & 0 & & & 0 & 0 \\
1 & 0 & & 0 & 0 & a_1 & 0 & & & 0 & 0 \\
0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & a_2 & 0 & & & \vdots & \vdots \\
 & & \ddots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
 & & & 0 & 0 & a_{j_0-1} & 0 & & & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & a_{N-1} & 0 & & & 1 & 0 \\
 & & & & 0 & a_{j_0+1} & 0 & \ddots & & 0 & 1 \\
 & & & & & & 1 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & \ddots & 1 & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & a_{j_0} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

En calculant les nombres ℓ_j^k $(1 \le j \le N)$ associés à l'opérateur $x_i^{\rho_1} D = x_i^{1+\rho_1} \partial/\partial x_i + x_i^{\rho_1} M(D,(v))$, on trouve

$$\ell_N^k = k , \qquad \ell_j^k = k + \rho_1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, N-1)$$

d'oú

$$\ell_N = 0 , \qquad \ell_j = \rho_1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, N-1)$$

et

$$i(D) = \rho_1 N - \sum_{j=1}^{N} \ell_j = \rho_1 N - (N-1)\rho_1 = \rho_1 = \rho_1(D) .$$

Considérons maintenant un diviseur à croisements normaux $f = x_1 \dots x_d$ $(d \leq n)$ et $\hat{\mathcal{O}}_f$ l'anneau des séries formelles $\hat{\mathcal{O}} = \boldsymbol{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ localisé en f. Soient $\Omega^1 = \bigoplus_1^n \hat{\mathcal{O}}\, dx_j$ le $\hat{\mathcal{O}}$-module des 1-formes différentielles à coefficients dans $\hat{\mathcal{O}}$, $\Omega_f^1 = \hat{\mathcal{O}}_f \otimes_{\hat{\mathcal{O}}} \Omega^1$ et

$$\nabla\colon \hat{\mathcal{O}}_f^N \to \hat{\mathcal{O}}_f^N \otimes_{\hat{\mathcal{O}}} \Omega_f^1$$

une connexion linéaire complètement intégrable.

L'opérateur différentiel $D_i = \nabla_{x_i \partial/\partial x_i}\colon \hat{\mathcal{O}}_f^N \to \hat{\mathcal{O}}_f^N$ défini par

$$D_i v = \langle \nabla v, x_i \partial/\partial x_i \rangle \qquad \forall v \in \hat{\mathcal{O}}_f^N$$

se prolonge de façon naturelle en

$$D_i\colon L_i \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_f} \hat{\mathcal{O}}_f^N \to L_i \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_f} \hat{\mathcal{O}}_f^N .$$

On pose

$$\rho_1(D_i\colon \hat{\mathcal{O}}_f^N \to \hat{\mathcal{O}}_f^N) = \rho_1(D_i\colon L_i \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_f} \hat{\mathcal{O}}_f^N \to L_i \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_f} \hat{\mathcal{O}}_f^N) = \rho_1(D_i)$$

et

$$i(\nabla) = \rho_1(\nabla) = \sup_{1 \leq j \leq n} (i(D_j)) = \sup_{1 \leq j \leq n} (\rho_1(D_j)) .$$

D'après les propositions I.6, I.3 et [4], théorème 1.22, on obtient le

Theoreme I.7. $\rho_1(\nabla) = 0$ *si, et seulement si, il existe une* $\hat{\mathcal{O}}_f$*-base dans laquelle la matrice de la connexion* ∇ *présente au pis un pôle logarithmique le long de* f.

II. Cas analytique

Notations.

$\mathcal{O} = \boldsymbol{C}\{x_1, x_2\}$

$\hat{\mathcal{O}} = \boldsymbol{C}[[x_1, x_2]]$

K (resp. $\hat{K}$) = le corps des fractions de l'anneau $\mathcal{O}$ (resp. $\hat{\mathcal{O}}$)

$\boldsymbol{C}((x_i))$ = le corps des fractions de l'anneau $\boldsymbol{C}\{x_i\}$ $(i = 1, 2)$

$K_1 = \boldsymbol{C}((x_2))[[x_1]]$

$K_2 = \boldsymbol{C}((x_1))[[x_2]]$

L_i = le corps des fractions de l'anneau K_i $(i = 1, 2)$

$f = x_1 x_2$

$H = \varprojlim_n \mathcal{O}/f^n\mathcal{O}$

H_f = le localisé de H en f
$\hat{\mathcal{O}}_f$ = le localisé de $\hat{\mathcal{O}}$ en f
$\mathcal{O}_f$ = le localisé de $\mathcal{O}$ en f

Soient $(N, p, q, r, t) \in \boldsymbol{N}^* \times \boldsymbol{N}^4$,

$$D_1 = D_1\left(x_1, x_2, \frac{d}{dx_1}\right) = x_1 \frac{d}{dx_1} + \frac{A_1}{x_1^p x_2^r}$$

$$D_2 = D_2\left(x_1, x_2, \frac{d}{dx_2}\right) = x_2 \frac{d}{dx_2} + \frac{A_2}{x_1^t x_2^q}$$

où A_1 et $A_2 \in \operatorname{End}(\mathcal{O}^N)$.

Sur K, on peut définir deux valuations $\mathscr{V}_{x_i}$ $(i = 1, 2)$ induites par les valuations naturelles des corps L_i $(i = 1, 2)$. On suppose que les matrices A_1 et A_2 sont analytiques dans le polydisque

$$\Delta(r_1, r_2) = \Delta(r_1) \times \Delta(r_2) = \{(x_1, x_2) \in \boldsymbol{C}^2; |x_1| < r_1, |x_2| < r_2\}$$

Proposition II.1. *Il existe des nombres strictement positifs δ_1 et δ_2 tels que*

$$\rho_1(D_1(x_1, x_2, \partial/\partial x_1)) = \rho_1(D_1(x_1, x_2^0, d/dx_1)) \quad pour \quad 0 < |x_2^0| < \delta_2$$

et

$$\rho_1(D_2(x_1, x_2, \partial/\partial x_2)) = \rho_1(D_2(x_1^0, x_2, d/dx_2)) \quad pour \quad 0 < |x_1^0| < \delta_1$$

Preuve. Il existe un vecteur cyclique $v' \in K^N \subset L_2^N$. Chaque composante v_d' de v s'écrit sous la forme

$$v_d' = \frac{\sum_{j \geqslant j_d} f_j^d x_2^j}{\sum_{k \geqslant k_d} g_k^d x_2^k}$$

avec j_d, $k_d \geqslant 0$; $f_{j_d}^d$, $g_{k_d}^d \in \boldsymbol{C}\{x_1\} - \{0\}$ et les f_j^d et g_k^d convergent dans le même disque $\Delta(r_1')$. v_d' s'écrit aussi

$$v_d' = \frac{f_{j_d}^d + f_{j_d+1}^d x_2 + \cdots}{g_{k_d}^d + g_{k_d+1}^d x_2 + \cdots} x_2^{j_d - k_d} \in L_2$$

La fonction $\lambda = \prod_{d=1}^N (g_{k_d}^d + g_{k_d+1}^d x_2 + \cdots)$ est inversible dans K_2, donc le vecteur $v = \lambda v'$ est aussi un vecteur cyclique pour D_2 (c.f [1]) et il s'écrit

$$v = \textstyle\sum_{l \geqslant l_0} v_l x_2^l, \qquad l_0 \in \boldsymbol{Z}, \qquad v_l \in \mathcal{O}(\Delta(r_l'))^N \qquad (l \geqslant l_0).$$

Ainsi on a:

$$(*) \qquad D_2^j v \in \mathcal{O}(\Delta(r_1'))_f[[x_2]]^N \qquad (0 \leqslant j \leqslant N-1)$$

où $\mathcal{O}(\Delta(r_1'))_f$ est le localisé en f de l'anneau $\mathcal{O}(\Delta(r_1'))$. D'autre part

$$\det(v, D_2 v, \ldots, D_2^{N-1} v) = \sum_{m \geqslant m_0} \frac{a_m(x_1)}{x_1^{d_m}} x_2^m$$

où $m_0 \in \boldsymbol{Z}$, $d_m \in \boldsymbol{N}$, $a_m(x_1) \in \mathcal{O}(\Delta(r_1'))$ pour $m \geqslant m_0$ et $a_{m_0}(x_1) \not\equiv 0$. Donc il existe $\delta_1' > 0$ tel que pour $0 < |x_1^0| < \delta_1'$, la famille de vecteurs $(v(x_1^0, x_2), \ldots, D_2^{N-1}(x_1^0, x_2, d/dx_2))$ soit libre, c'est à dire telle que $v(x_1^0, x_2)$ soit un vecteur cyclique pour $D_2(x_1^0, x_2, d/dx_2)$. D'après les relations $(*)$, $D_2^N v$ s'écrit sous la forme

$$D_2^N v = \sum_{j=0}^{N-1} b_j D_2^j v$$

avec

$$b_j = \sum_{l \geqslant l_j} \frac{b_j^l(x_1)}{x_1^{d_l}} x_2^l$$

où $l_j \in \boldsymbol{Z}$ $(0 \leqslant j \leqslant N-1)$, $d_l \in \boldsymbol{N}$ $(l \geqslant l_j)$, $b_j^l(x_1) \in \mathcal{O}(\Delta(r_1'))(l \geqslant l_j)$, et $b_j^l(x_1) \not\equiv 0$. Quitte à prendre δ_1' plus petit, on peut supposer que

$$b_j^{l_j}(x_1^0) \neq 0 \quad \text{pour} \quad 0 < |x_1^0| < \delta_1' .$$

Ainsi, pour $\delta_1 = \inf(\delta_1', r_1)$ et $0 < |x_1^0| < \delta_1$, on a:

$$\sup\left(0, \sup_{0 \leqslant j \leqslant N-1} (-\mathscr{V}_{x_2}(b_j(x_1, x_2))\right) = \sup\left(0, \sup_{0 \leqslant j \leqslant N-1} (-\mathscr{V}_{x_2}(b_j(x_1^0, x_2)))\right)$$

c'est à dire que

$$\rho_1(D_2(x_1, x_2, \partial/\partial x_2)) = \rho_1(D_2(x_1^0, x_2, d/dx_2)) .$$

On démontre de la même manière la deuxième égalité de la proposition. On suppose dans la suite que D_1 et D_2 commutent.

Théoréme II.2. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes*:

a) $\rho_1(D_1) = \rho_1(D_2) = 0$

b) *Il existe des matrices* $P \in GL(N, \mathcal{O}_f)$, C_1 *et* $C_2 \in \operatorname{End}(\boldsymbol{C}^N)$ *telles que*

$$P^{-1}\, dP + \frac{P^{-1} A_1 P}{x_1^{p+1} x_2^r} dx_1 + \frac{P^{-1} A_2 P}{x_1^t x_2^{q+1}} dx_2 = \frac{C_1}{x_1} dx_1 + \frac{C_2}{x_2} dx_2 .$$

Preuve. L'implification b) $\Rightarrow$ a) est triviale.

Supposons que la condition a) soit vérifiée. D'après [4], théorème 4.2, la condition b) est vérifiée par une matrice P dans $GL(N, \hat{\mathcal{O}}_f)$. Dans notre cas, les matrices A_1 et A_2 étant convergentes on peut remplacer dans [4] l'anneau $\hat{\mathcal{O}}$ par l'anneau H et la condition b) sera vérifiée par une matrice $P \in GL(N, H_f)$. Il nous reste à démontrer que P converge. P s'écrit sous la forme

$$P = \frac{T}{x_1^d x_2^d} \quad \text{avec} \quad d \in \boldsymbol{N}, \qquad T \in \operatorname{End}(H^N)$$

donc il existe un polydisque $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \subset \mathbf{C}^2$ tel que

$$T \in \operatorname{End}\left(\mathcal{O}(\Delta_1)[[x_2]]^N \cap \mathcal{O}(\Delta_2)[[x_1]]^N\right). \tag{1}$$

Quitte à rapetisser Δ, on peut supposer que pour $(x_1^0, x_2^0) \in \Delta_1^* \times \Delta_2^*$, on a:

$A_1, A_2 \in \operatorname{End}(\mathcal{O}(\Delta)^N)$

$P(x_1^0, x_2) \in GL(N, \mathbf{C}[[x_2]][x_2^{-1}])$

$P(x_1, x_2^0) \in GL(N, \mathbf{C}[[x_1]][x_1^{-1}])$

$\rho_1(D_1(x_1, x_2^0, d/dx_1)) = \rho_1(D_2(x_1^0, x_2, d/dx_2)) = 0$ (Proposition II.1).

Ainsi, pour $x_1^0 \in \Delta_1^*$ et $x_2^0 \in \Delta_2^*$, $P(x_1^0, x_2)$ et $P(x_1, x_2^0)$ vérifient les équations différentielles ordinaires singulières régulières:

$$x_1 \frac{d}{dx_1} P(x_1, x_2^0) + \frac{A_1(x_1, x_2^0)}{x_1^p (x_2^0)^r} P(x_1, x_2^0) - P(x_1, x_2^0) C_1 = 0$$

et

$$x_2 \frac{d}{dx_2} P(x_1^0, x_2) + \frac{A_2(x_1^0, x_2)}{(x_1^0)^t x_2^q} P(x_1^0, x_2) - P(x_1^0, x_2) C_2 = 0$$

donc

$$P(x_1, x_2^0) \in \operatorname{End}(\mathcal{O}(\Delta_1)^N) \tag{2}$$

et

$$P(x_1^0, x_2) \in \operatorname{End}(\mathcal{O}(\Delta_2)^N) \tag{3}$$

c'est à dire que

$$T(x_1, x_2^0) \in \operatorname{End}(\mathcal{O}(\Delta_1)^N) \quad \text{et} \quad T(x_1^0, x_2) \in \operatorname{End}(\mathcal{O}(\Delta_2)^N)$$

or $T(x_1, 0) \in \operatorname{End}(\mathcal{O}(\Delta_1)^N)$ et $T(0, x_2) \in \operatorname{End}(\mathcal{O}(\Delta_2)^N)$ (d'après (1)) par conséquent $T(x_1, x_2)$ est une fonction définie sur $\Delta_1 \times \Delta_2 = \Delta$. Donc P est une fonction définie sur $\Delta_1^* \times \Delta_2^*$ et est solution d'un système de Pfaff régulier sur $\Delta_1^* \times \Delta_2^*$, par suite

$$P \in \operatorname{End}(\mathcal{O}(\Delta_1^* \times \Delta_2^*)^N)$$

d'après (2) (ou (3)) et le théorème de dépendance d'un paramètre. Ainsi $T \in \operatorname{End}(\mathcal{O}(\Delta_1^* \times \Delta_2^*)^N)$ d'où, d'après (1), la convergence de T dans $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$, ce qui prouve que $P \in GL(N, \mathcal{O}_f)$.

Théorème II.3. *On suppose que $\rho_1(D_1) = \rho_1(D_2) = 0$. Si une série $Z \in \hat{\mathcal{O}}_f^N$ est telle que $D_1 Z$ et $D_2 Z$ convergent, alors Z converge.*

Preuve. Soit $P \in GL(N, \mathcal{O}_f)$ vérifiant la condition b) du théorème II.2. Si on pose $Z = Pu$, alors le système

$$D_1 Z = g_1, \qquad D_2 Z = g_2$$

avec $g_1, g_2 \in \mathcal{O}_f^N$, $Z \in \hat{\mathcal{O}}_f^N$, $Z \in \hat{\mathcal{O}}_f^N$ se transforme en

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} u + C_1 u = h_1 , \qquad x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} u + C_2 u = h_2$$

avec $h_1 = P^{-1} g_1 \in K^N$ et $h_2 = P^{-1} g_2 \in K^N$. Chaque composante u_m de u s'écrit sous la forme

$$u_m = \frac{a_m}{b_m}; \quad a_m \in \hat{\mathcal{O}}, \quad b_m \in \mathcal{O} \qquad (1 \leqslant m \leqslant N).$$

Pour demontrer le théorème, il suffit de démontrer que les a_m convergent. Soit $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$ le domaine de convergence de A_1, A_2, P, g_1 et g_2. Posons:

$$h_1 = {}^t(h_1^1, \ldots, h_1^N)$$

où les h_1^i s'écrivent sous la forme

$$h_1^i = \frac{c_i}{d_i} = \frac{\sum_{m \geqslant m_i} c_i^m(x_2) x_1^m}{\sum_{n \geqslant n_i} d_i^n(x_2) x_1^n} \qquad (1 \leqslant i \leqslant N)$$

avec $c_i^m(x_2)$, $d_i^n(x_2) \in \mathcal{O}(\Delta_2)$ $(m \geqslant m_i, n \geqslant n_i)$ et $c_i^{m_i}(x_2) \not\equiv 0$, $d_i^{n_i}(x_2) \not\equiv 0$. Donc:

$$h_1^i = \frac{c_i^{m_i}(x_2)}{d_i^{n_i}(x_2)} x_1^{m_i - n_i} + \left(\frac{c_i^{m_i+1} d_i^{n_i} - c_i^{m_i} d_i^{n_i+1}}{(d_i^{n_i})^2} \right) x_1^{m_i - n_i + 1} + \cdots$$

Quitte à prendre Δ_2 plus petit, on peut supposer que le seul zéro de $d_i^{n_i}$ est $x_2 = 0$, par conséquent h_1 s'écrit sous la forme

$$h_1 = \sum_{s \geqslant s_0} h^s(x_2) x_1^s$$

avec $s_0 \in \boldsymbol{Z}$ et $h^s(x_2) \in \mathcal{O}(\Delta_2)_{x_2}^N$ où $\mathcal{O}(\Delta_2)_{x_2}$ désigne l'espace des fonctions holomorphes dans $\Delta_2 - \{0\}$ avec éventuellement un pôle en $x_2 = 0$.

De la même manière on montre que u_m s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{a_m}{b_m} = \frac{\sum_{i \geqslant i_m} a_m^i(x_2) x_1^i}{\sum_{j \geqslant j_m} b_m^j(x_2) x_1^j} \\ &= \frac{a_m^{i_m}(x_2)}{b_m^{j_m}(x_2)} x_1^{i_m - j_m} + \left(\frac{a_m^{i_m+1}}{b_m^{j_m}} - \frac{a_m^{i_m} b_m^{j_m+1}}{(b_m^{j_m})^2} \right) x_1^{i_m - j_m + 1} + \cdots \\ &\quad + F_m^s(a_m^{i_m}, \ldots, a_m^{s+i_m}, b_m^{j_m}, \ldots, b_m^{j_m+s}) x_1^{s+i_m-j_m} + \cdots \end{aligned}$$

où F_m^s est un quotient dont le dénominateur est $(b_m^{j_m})^{s+1}$ et le numérateur est une somme de produits des éléments $a_m^{i_m}, \ldots, a_m^{i_m+s}, b_m^{j_m}, \ldots, b_m^{j_m+s}$ où le dégré de $a_m^{i_m}$ est 1, et $b_m^{j_m}(x_2) \in \mathcal{O}(\Delta_2) - \{0\}$, $a_m^{i_m}(x_2) \in \boldsymbol{C}[[x_2]] - \{0\}$, $b_m^j(x_2) \in \mathcal{O}(\Delta_2)$ $(j \geqslant j_m)$, $a_m^i(x_2) \in \boldsymbol{C}[[x_2]]$ $(i \geqslant i_m)$.

Ainsi u s'écrit sous la forme

$$u = \sum_{i \geqslant i_0} v_i(x_2) x_1^i\,, \quad i_0 \in \boldsymbol{Z}\,, \quad v_i = {}^t(F_1^s, \ldots, F_N^s) \quad \text{et} \quad i_0 \leqslant s_0\,.$$

On a donc la relation

$$x_2 \frac{d}{dx_2} v_{i_0}(x_2) + C_2 v_{i_0}(x_2) \in \mathcal{O}(\Delta_2)_{x_2}^N$$

Par conséquent

$$v_{i_0}(x_2) = {}^t\!\left(\frac{a_1^{i_1}(x_2)}{b_1^{j_1}(x_2)}, \ldots, \frac{a_N^{i_N}(x_2)}{b_N^{j_N}(x_2)}\right) \in \mathcal{O}(\Delta_2)_{x_2}^N$$

c'est à dire que $a_m^{i_m}(x_2) \in \mathcal{O}(\Delta_2)$ $(1 \leqslant m \leqslant N)$ et on démontre ainsi par récurrence que les $v_i(x_2) \in \mathcal{O}(\Delta_2)_{x_2}^N$ $(i \geqslant i_0)$ et donc les $a_m^i(x_2)$ convergent dans Δ_2 $(i \geqslant i_m, 1 \leqslant m \leqslant N)$. Ainsi

(4) $$a_m \in \mathcal{O}(\Delta_2)[[x_1]] \qquad (1 \leqslant m \leqslant N)$$

De la même manière, on montre que:

(5) $$a_m \in \mathcal{O}(\Delta_1)[[x_2]] \qquad (1 \leqslant m \leqslant N)$$

Quitte à prendre une nouvelle fois Δ_2 plus petit, on peut supposer que pour tout x_2^0 fixé dans Δ_2^*, on a:

$$b_m^{j_m}(x_2^0) \neq 0 \qquad (1 \leqslant m \leqslant N) \quad \text{et} \quad h_1(x_1, x_2^0) \in \mathcal{O}(\Delta_1)_{x_1}^N$$

d'où

$$\left(x_1 \frac{d}{dx_1} + C_1\right) u(x_1, x_2^0) = h_1(x_1, x_2^0) \in \mathcal{O}(\Delta_1)_{x_1}^N$$

avec $u(x_1, x_2^0) \in \boldsymbol{C}[[x_1]][x_1^{-1}]^N$ par suite

(6) $$u(x_1, x_2^0) \in \mathcal{O}(\Delta_1)_{x_1}^N$$

et donc $a_m(x_1, x_2^0) \in \mathcal{O}(\Delta_1)$ $(1 \leqslant m \leqslant N)$

De la même manière on démontre que pour tout x_1^0 fixé dans Δ_1^*,

(7) $$a_m(x_1^0, x_2) \in \mathcal{O}(\Delta_2) \qquad (1 \leqslant m \leqslant N)$$

Or d'après (4) et (5):

$$a_m(x_1, 0) \in \mathcal{O}(\Delta_1) \qquad (1 \leqslant m \leqslant N) \quad \text{et} \quad a_m(0, x_2) \in \mathcal{O}(\Delta_2) \qquad (1 \leqslant m \leqslant N)$$

donc $a_m(x_1, x_2)$ définit une fonction sur $\Delta_1 \times \Delta_2$ $(1 \leqslant m \leqslant N)$, or $u(x_1, x_2)$ est solution sur $\Delta_1^* \times \Delta_2^*$ d'une équation différentielle ordinaire régulière et d'après

(7) et le théorème de dépendance analytique d'un paramètre, $u(x_1, x_2) \in \mathcal{O}(\Delta_1^* \times \Delta_2^*)$, d'où l'analyticité sur $\Delta_1 \times \Delta_2$ des fonctions $a_m(x_1, x_2)$ $(1 \leqslant m \leqslant N)$, ce qui termine la démonstration.

Soient U un ouvert connexe de $\boldsymbol{C}^2$ contenant l'origine, $Y = \{(x_1, x_2) \in \boldsymbol{C}^2;\ x_1 \cdot x_2 = 0\}$, V un fibré vectoriel de range $N > 0$, analytique sur $U - Y$, méromorphe le long de Y et ∇ une connexion linéaire sur V. A tout $y \in Y$, on associe l'irrégularité $\rho_1(D_i, y)$ de l'opérateur différentiel:

$$D_i = \nabla_{x_i \partial/\partial x_i} : \begin{array}{ccc} K_y^N & \longrightarrow & K_y^N \\ \text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ v & \longmapsto & \langle \nabla v, x_i \partial/\partial x_i \rangle \end{array} \qquad (i = 1, 2)$$

où K_y est le corps des germes en y des fonctions méromorphes. On suppose que la connexion ∇ est complètement intégrable.

Théorème II.4. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

a) $\rho_1(D_j, 0) = 0 \quad (j = 1, 2)$

b) *Pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage ouvert W de y et une base de V sur $W - Y$, méromorphe le long de Y, telle que la matrice de la connexion présente au pis un pôle logarithmique le long de Y.*

Preuve. Le problème égalité local, on peut supposer le fibré V trivial. Pour tout $y \in Y_1 = pr_1^{-1}\{0\}$, il existe un vecteur $v \in K_y^N$ cyclique. pour D_1, c'est à dire que si on pose:

$$D_1^N v = \sum_{i=0}^{N-1} a_i D_1^i v \qquad \text{avec } a_1 \in K_y \qquad (i = 0, 1, \ldots, N-1)$$

on a

$$\rho_1(D_1, y) = \sup\left(0, \sup_{0 \leqslant i \leqslant N-1} (-v_{x_1}(a_i))\right).$$

Comme cette dernière égalité est vraie dans un voisinage de y dans Y_1, l'application:

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \longrightarrow & \boldsymbol{N} \\ \text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ y & \longmapsto & \rho_1(D_1, y) \end{array}$$

est localement constante, donc constante sur Y_1, c'est à dire qu'elle vaut $\rho_1(D_1, 0)$. L'irrégularité $\rho_1(D_2, y)$ de l'opérateur

$$D_2 = \nabla_{x_2 \partial/\partial x_2} : \begin{array}{ccc} K_y^N & \longrightarrow & K_y^N \\ \text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ v & \longmapsto & \langle \nabla v, x_2 \partial/\partial x_2 \rangle \end{array}$$

est également constante sur $Y_2 = pr_2^{-1}\{0\}$ et vaut $\rho_1(D_2, 0)$. Pour $y \in Y_1 - \{0\}$, $\rho_1(D_2, y) = 0$. Pour $y \in Y_2 - \{0\}$, $\rho_1(D_1, y) = 0$. On a donc pour $y \in Y$:

$$\rho_1(D_1, y) \leqslant \rho_1(D_1, 0) \qquad \text{et} \qquad \rho_1(D_2, y) \leqslant \rho_1(D_2, 0)\,.$$

Le théorème découle de ces deux dernières inégalités et du théorème II.2.

Bibliographie

[1] Deligne, P., *Equations différentielles à points singuliers réguliers,* Lect. Notes in Math., n° 163, Springer, 1970.

[2] Gérard R. et Levelt, A. H. M., Invariants mesurant l'irrégularité en un point singulier des systèmes d'équations différentielles linéaires, Ann. Inst. Fourier, **23**, **1** (1973), 157–195.

[3] Malgrange, B., Sur les points singuliers des équations différentielles, l'Enseignement Mathématique, **20** (1974), 147–176.

[4] Van Den Essen, A. R. P., *Regular singularities along normal crossings,* Lect. Notes in Math., n° 712, Springer, 1979.

nuna adreso:
U.S.T.H.B.
Institut de Mathématique
BP 32, El-Alia
Bab-Ezzouar, Alger
Algéria

(Ricevita la 23-an de februaro, 1987)
(Reviziita la 12-an de januaro, 1988)