Funkcialaj Ekvacioj, **10** (1967) 43-66

Sur l'Application Semi-continue dont la Valeur est un Compact Convexe

Par Masuo HUKUHARA

(Université de Kyoto)

Dans quelques problèmes on traite des applications qui font correspondre à un point un compact convexe. Quelques-unes des propriétés que possèdent des applications continues point à point s'étendent à de tels applications si elles sont semi-continues supérieurement. Pour le voir il serait utile d'étendre au cas de tels applications un théorème bien connu sur l'existence d'une suite monotone de fonctions continues qui converge vers une fonction semi-continue réelle donnée. Cette extension que nous appelons théorème fondamental est établie seulement dans le cas où le domaine et le contredomaine sont des parties des espaces à dimension finie. Avant de l'établir nous étudierons les propriétés des applications point à compact. Les espaces dans lesquels le domaine et le contredomaine sont contenus sont supposés distanciés mais il ne serait pas difficile d'étendre les résultats au cas des espaces topologiques plus généraux.

Comme application du théorème fondamental, nous montrerons comment on peut définir le degré topologique d'une transformation $I-F$, en conservant les propriétés essentielles, où F est une application point à compact convexe qui est compacte et semicontinue supérieurement. On verra que le théorème de Kakutani sur l'existence des points fixes en est une conséquence immédiate.

Nous désignerons par $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ des espaces distanciés et par $\mathfrak{B}$ un espace de Banach.

1. Ensembles limites d'une suite d'ensembles

Considérons une suite d'ensembles $\{A_k\}$ dans un espace distancié $\mathfrak{D}$. Nous définissons les *ensembles limites inférieur* et *supérieur* par

$$\underline{\lim}\, A_k = \{x\,;\ \lim \operatorname{dist}(x, A_k)=0 \quad \text{pour } k\to\infty\},$$

$$\overline{\lim}\, A_k = \{x\,;\ \underline{\lim} \operatorname{dist}(x, A_k)=0 \quad \text{pour } k\to\infty\},$$

où $\operatorname{dist}(x, A)$ désigne la distance entre x et A:

$$\operatorname{dist}(x, A)=\inf\{\operatorname{dist}(x, y)\,;\ y\in A\}.$$

Il est clair que si $A_k\subset B_k$, on a

$$\underline{\lim}\, A_k\subset \underline{\lim} B_k, \qquad \overline{\lim}\, A_k\subset \overline{\lim}\, B_k.$$

De plus, on voit immédiatement que si $\{A_k'\}$ est une suite partielle de $\{A_k\}$

on a

$$\underline{\lim}\, A_k \subset \underline{\lim}\, A_k' \subset \overline{\lim}\, A_k' \subset \overline{\lim}\, A_k.$$

Proposition 1.1 *Les deux ensembles limites d'une suite $\{A_k\}$ sont fermés.*

Considérons en effet une suite de points $\{a_k\}$ extraite de $\underline{\lim}\, A_k$ et convergeant vers a. Puisque

$$\operatorname{dist}(a, A_k) \leqq \operatorname{dist}(a, a_n) + \operatorname{dist}(a_n, A_k),$$

on a

$$\overline{\lim}\ \operatorname{dist}(a, A_k) \leqq \operatorname{dist}(a, a_n),$$

dont le second membre s'annule avec $1/n$. a appartient donc à $\underline{\lim}\, A_k$.

On voit de même que $\overline{\lim}\, A_k$ est fermé.

Si les deux limites d'une suite $\{A_k\}$ coïncident avec A, nous dirons que la suite a la *limite déterminée* A et écrirons

$$A = \lim A_k \quad \text{ou} \quad A_k \to A.$$

Il pourra arriver que la limite déterminée devient vide.

On voit sans peine que l'on a la

Proposition 1.2 *Une suite monotone $\{A_k\}$ a la limite déterminée A. Si elle est décroissante, on a*

$$A = \cap \overline{A_k}\,;$$

si elle est croissante, on a

$$A = \overline{\cup A_k}.$$

Démontrons maintenant la

Proposition 1.3 Si

$$B = \overline{\lim}\, A_k - \underline{\lim}\, A_k = \{x \in \overline{\lim}\, A_k\,;\ x \notin \underline{\lim}\, A_k\}$$

est séparable, on peut extraire de la suite $\{A_k\}$ une suite partielle qui a la limite déterminée.

Prenons une famille dénombrable d'ouverts

$$G = \{G_k\,;\ k = 1, 2, \cdots\}$$

telle que pour $b \in B$ les ouverts G_k qui contiennent b forment un système fondamental de voisinages de b.

Prenons un point $b_1 \in B \cap G_1$. On peut extraire de la suite $\{A_k\}$ une suite partielle $\{A_{1k}\}$ telle que b_1 appartienne à $\underline{\lim}\, A_{1k}$.

Si l'on a

$$B \cap G_2 \cap \underline{\lim}\, A_{1k} = B \cap G_2 \cap \overline{\lim}\, A_{1k},$$

on pose $A_{2k} = A_{1k}$. Sinon, on prend un point b_2 qui appartient au second membre de cette égalité mais non au premier. On peut extraire de la suite $\{A_{1k}\}$ une suite partielle $\{A_{2k}\}$ telle que b_2 appartienne à $\underline{\lim}\, A_{2k}$.

Si l'on a

$$B \cap G_3 \cap \underline{\lim}\, A_{2k} = B \cap G_3 \cap \overline{\lim}\, A_{2k},$$

on pose $A_{3k} = A_{2k}$. Sinon, on prend un point b_3 qui appartient au second membre de cette égalité mais non au premier. On peut extraire de la suite $\{A_{2k}\}$ une suite partielle $\{A_{3k}\}$ telle que b_3 appartienne à $\underline{\lim}\, A_{3k}$, et ainsi de suite.

D'après le procédé diagonal, on peut construire une suite partielle $\{A_k'\}$ de la suite $\{A_k\}$ qui satisfait à la condition suivante:

On a ou bien

(1) $$B \cap G_n \cap \underline{\lim}\, A_k' = B \cap G_n \cap \overline{\lim}\, A_k',$$

ou bien

(2) $$b_n \in B \cap G_n \cap \underline{\lim}\, A_k'.$$

Si un point $b \in \overline{\lim}\, A_k'$ n'appartenait pas à $\underline{\lim}\, A_k'$, on n'aurait pas (1) pour l'indice n tel que $b \in G_n$, mais on aurait (2). Les ouverts G_n qui contiennent b formant un système fondamental de voisinages de b, le point b_n tel que $b \in G_n$ convergerait vers b et b appartiendrait à $\underline{\lim}\, A_k'$ puisque celui-ci est fermé. Nous arrivons ainsi à une contradiction.

2. L'espace dont les éléments sont des compacts dans $\mathfrak{D}$

Soit A un compact non vide dans $\mathfrak{D}$. Le *δ-voisinage* $O_\delta(A)$ est l'ensemble

$$O_\delta(A) = \{x \in D;\ \mathrm{dist}(x, A) < \delta\}.$$

La fermeture $\bar{O}_\delta(A)$ de $O_\delta(A)$ s'appellera *δ-voisinage fermé* de A. Nous définissons la *distance* $\mathrm{Dist}(A, B)$ *entre deux compacts* A et B par

$$\mathrm{Dist}(A, B) = \inf\{\delta > 0;\ O_\delta(A) \supset B,\ O_\delta(B) \supset A\}.$$

On voit sans peine les conditions suivantes remplies:

1° $\mathrm{Dist}(A, B) \geqq 0$ et si l'égalité a lieu, on a $A = B$;

2° $\mathrm{Dist}(A, B) = \mathrm{Dist}(B, A)$;

3° $\mathrm{Dist}(A, B) + \mathrm{Dist}(B, C) \geqq \mathrm{Dist}(A, C)$.

Nous obtenons ainsi un espace distancié dont les éléments sont des compacts non vides dans $\mathfrak{D}$. Nous le désignerons par Comp $\mathfrak{D}$. Nous dirons qu'*une suite de compacts* $\{A_k\}$ *converge vers un compact* A si l'on a

$$\mathrm{Dist}(A_k, A) \to 0.$$

On voit sans peine que si une suite de compacts $\{A_k\}$ converge vers un compact A, la suite a la limite déterminée mais la réciproque n'est pas vraie.

Dorénavant nous supposerons l'espace $\mathfrak{D}$ complet.

Proposition 2.1 *Soit* $\{A_k\}$ *une suite dans* Comp $\mathfrak{D}$. *Si, quelque petit que soit* $\varepsilon > 0$, *il existe un compact* C_ε *tel que l'on ait* $A_k \subset O_\varepsilon(C_\varepsilon)$ *pour presque tous les* k,

$$A = \overline{\lim}\, A_k$$

est un compact non vide et on a $A_k \subset O_\varepsilon(A)$ *pour presque tous les* k.

Soit $a_k \in A_k$. Nous voulons montrer que l'on peut extraire de la suite $\{a_k\}$ une suite fondamentale de Cauchy.

Fixons la valeur de ε. Si k est assez grand, il existe un point $c_k \in C_{\varepsilon/3}$ tel que

$$\mathrm{dist}(a_k, c_k) < \varepsilon/3.$$

On peut extraire de la suite $\{c_k\}$ une suite partielle convergente $\{c_k'\}$. Si $\{a_k'\}$ est la suite partielle correspondante de $\{a_k\}$, on a

$$\mathrm{dist}(a_h', a_k') < \varepsilon$$

pour h et k assez grands.

Considérons maintenant une suite décroissante $\{\varepsilon_k\}$ convergeant vers 0. D'après ce que nous avons vu tout à l'heure, on peut définir de proche en proche les suites $\{a_k^{(r)}\}$ telles que $\{a_k^{(r)}\}$ soit une suite partielle de la suite $\{a_k^{(r-1)}\}$ satisfaisant aux inégalités

$$\mathrm{dist}(a_h^{(r)}, a_k^{(r)}) < \varepsilon_r$$

pour h et k assez grands.

A l'aide du procédé diagonal bien connu, on peut extraire de la suite $\{a_k\}$ une suite partielle $\{b_k\}$ qui, quel que soit l'entier r, devient une suite partielle de $\{a^{(r)}\}$ si on en supprime un nombre fini de termes. $\{b_k\}$ est alors une suite fondamentale de Cauchy et, d'après la complétesse de l'espace $\mathfrak{D}$, elle est convergente. Le point limite de la suite $\{b_k\}$ appartient à $A = \overline{\lim}\, A_k$. A est donc non vide.

Il est clair que A est une partie fermée du compact

$$C = \cap \{C_{1/k};\quad k = 1, 2, \cdots\}.$$

A est donc compact.

Si l'on avait $A_k \not\subset O_\varepsilon(A)$ pour une infinité de k, on pourrait extraire de la suite $\{A_k\}$ une suite partielle $\{A_k'\}$ telle que $A_k' \not\subset O_\varepsilon(A)$ pour tous les k. Si l'on avait $a_k' \in A_k'$ et $a_k' \notin O_\varepsilon(A)$, on pourrait extraire de la suite $\{a_k'\}$ une suite partielle convergente et son point limite serait un point de A n'appartenant pas à $O_\varepsilon(A)$. C'est évidemment absurde.

Proposition 2.2 *Si A est un compact contenu dans $\underline{\lim}\, A_k$, on a $A \subset O_\varepsilon(A_k)$ pour presque tous les k.*

Si l'on n'avait pas la conclusion, on aurait $A \not\subset O_\varepsilon(A_k)$ pour une infinité de k. Si donc $\{A_k'\}$ était une suite partielle convenable de $\{A_k\}$, on pourrait extraire de A un point a_k' n'appartenant pas à $O_\varepsilon(A_k')$. On pourrait supposer la suite $\{a_k'\}$ convergente sans perdre la généralité. Alors son point limite appartiendrait à A mais non à $\underline{\lim}\, A_k$. Donc, A ne serait pas contenue dans $\underline{\lim}\, A_k$, contrairement à l'hypothèse.

3. Convergence d'une suite dans Comp $\mathfrak{D}$

Proposition 3.1 *Si l'on a*

$$\mathrm{Dist}(A_h, A_k) \to 0 \quad pour \quad h, k \to \infty,$$

les deux limites: $\underline{\lim}\, A_k$ *et* $\overline{\lim}\, A_k$, *coïncident avec un compact* A *et on a*

$$\mathrm{Dist}(A_k, A) \to 0 \quad pour \quad k \to \infty.$$

On voit sans peine la coïncidence des limites $\underline{\lim}\, A_k$ et $\overline{\lim}\, A_k$. La proposition 2.1 montre ensuite la compacité de l'ensemble limite A puisqu'on peut prendre pour C_ε l'ensemble A_r, r désignant un entier tel que

$$\mathrm{Dist}(A_k, A_r) < \varepsilon \quad \text{pour} \quad k > r.$$

La conclusion de la même proposition montre que l'on a l'inclusion $A_k \subset O_\varepsilon(A)$ pour k assez grand.

On peut ensuite appliquer la proposition 2.2, et la conclusion de la proposition montre que l'on a l'inclusion $A \subset O_\varepsilon(A_k)$ pour k assez grand. La proposition à démontrer est donc établie.

D'après cette proposition l'espace Comp $\mathfrak{D}$ est complet.

Proposition 3.2 *Soit* $\{A_k\}$ *une suite de compacts. S'il exists un compact* C *qui contient tous les* A_k, *la coïncidence des deux limites*: $\underline{\lim}\, A_k$ *et* $\overline{\lim}\, A_k$, *est suffisante pour la convergence de la suite* $\{A_k\}$.

En effet, l'hypothèse de la proposition 2.1 est remplie, en prenant C pour C_ε, et l'ensemble limite A est compact. La proposition 2.2 est aussi applicable. Les conclusions des deux propositions impliquent la convergence de la suite $\{A_k\}$ vers A.

Proposition 3.3 *Une famille de compacts contenus dans un compact est une partie compacte de* Comp $\mathfrak{D}$, *c'est-à-dire de toute suite de compacts contenus dans un compact* C *on peut extraire une suite partielle convergente dans* C.

Soit $\{A_k\}$ la suite extraite de la famille. D'après la proposition 2.1,

$$A = \overline{\lim}\, A_k$$

est un compact non vide. D'après la proposition 1.3, on peut extraire de la suite $\{A_k\}$ une suite partielle $\{A_k'\}$ qui a la limite déterminée A'. Alors, la proposition 3.2 montre que la suite $\{A_k'\}$ converge vers sa limite A'.

4. Continuité et semi-continuité

Considérons une application F d'un espace distancié $\mathfrak{D}$ dans Comp $\mathfrak{D}'$. On peut définir, comme les deux limites d'une suite de compacts, celles de l'application F en a par

$$\underline{\lim_{x \to a}}\, F(x) = \{y \in \mathfrak{D}';\ \lim\ \mathrm{dist}(y, F(x)) = 0\},$$

$$\overline{\lim_{x\to a}}\, F(x)=\{y\in\mathfrak{D}';\ \underline{\lim}\ \mathrm{dist}(y, F(x))=0\}.$$

L'application F est dite *semi-continue inférieurement* en a si, en désignant par ε un nombre positif quelconque, on a

(1) $$F(a)\subset O_{\varepsilon}(F(x))$$

pour x assez voisin de a. Dans ce cas, on a évidemment

(2) $$F(a)\subset \underline{\lim_{x\to a}}\, F(x).$$

La réciproque est aussi vraie, c'est-à-dire si l'on a (2), F est semi-continue inférieurement en a.

En effet, supposons le contraire. Il existerait alors nue suite $\{a_k\}$ convergeant vers a et telle que

$$F(a)\not\subset O_{\varepsilon}(F(a_k)).$$

On pourrait extraire de $F(a)$ une suite $\{b_k\}$ telle que $b_k\notin O_{\varepsilon}(F(a_k))$ et d'après la compacité de $F(a)$, on pourrait en extraire une suite partielle convergente. Son point limite ne pourrait appartenir à $\underline{\lim}\, F(x)$. C. Q. F. D.

L'application F est dite *semi-continue supérieurement* en a si, en désignant par ε un nombre positif quelconque, on a

$$F(x)\subset O_{\varepsilon}(F(a))$$

pour x assez voisin de a. Dans ce cas on a évidemment

$$F(a)\supset \overline{\lim_{x\to a}}\, F(x)$$

mais cette condition n'est pas suffisante pour la semi-continuité supérieure.

Proposition 4.1 *Pour qu'une application F de $\mathfrak{D}$ dans* Comp $\mathfrak{D}'$ *soit semi-continue supérieurement en a, il faut et il suffit que l'on ait la condition suivante :*

Si une suite $\{a_k\}$ extraite de $\mathfrak{D}$ converge vers a, et si $b_k\in F(a_k)$, on peut extraire de la suite $\{b_k\}$ une suite partielle convergeant vers un point de $F(a)$.

Si F n'est pas semi-continue supérieurement en a, on peut trouver une suite $\{a_k\}$ convergeant vers a et telle que

$$F(x)\not\subset \bar{O}_{\varepsilon}(f(a))$$

pour $x=a_k$, ε étant un certain nombre positif. Il existe donc un point $b_k\in F(a_k)$ qui n'appartient pas à $\bar{O}_{\varepsilon}(F(a))$. Alors aucune suite partielle de la suite $\{b_k\}$ ne peut converger vers un point de $F(a)$.

La nécessité de la condition étant évidente, la proposition est établie.

Une application semi-continue inférieurement (supérieurement) en chaque point de $\mathfrak{D}$ est dite *semi-continue inférieurement* (*supérieurement*) *dans* $\mathfrak{D}$.

L'application F est dite continue en a si l'on a

$$\mathrm{Dist}(F(x), F(a))\to 0 \quad \text{pour} \quad x\to a.$$

Dans ce cas nous écrirons aussi $F(x) \to F(a)$ ou $\lim F(x) = F(a)$ pour $x \to a$. Une application continue en chaque point de $\mathfrak{D}$ est dite *continue* dans $\mathfrak{D}$.

D'après la définition de la continuité, on voit immédiatement que les semi-continuités inférieure et supérieure impliquent la continuité.

Si $\mathfrak{D} = R^n$ l'inégalité

$$\mathrm{Dist}(A, B) < \varepsilon$$

entraîne

$$\mathrm{Dist}(\bar{O}_\delta(A), \bar{O}_\delta(B)) < \varepsilon.$$

On a donc la

Proposition 4.2 *$\bar{O}_\delta$ est une application continue de* Comp R^n *dans* Comp R^n.

Si T est une transformation qui fait correspondre à un point $x \in \mathfrak{D}$ un point $Tx \in \mathfrak{D}'$, on désigne par la même lettre l'application qui fait correspondre à une partie X de $\mathfrak{D}$ son image définie par

$$T(X) = \{Tx\,;\ x \in X\}.$$

T est évidemment croissante, c'est-à-dire on a $T(A) \subset T(B)$ pour $A \subset B$.

Proposition 4.3 *Si T est continue comme application de $\mathfrak{D}$ dans $\mathfrak{D}'$, elle est aussi continue comme application de* Comp $\mathfrak{D}$ *dans* Comp $\mathfrak{D}'$.

Soit $A \in \mathrm{Comp}\,\mathfrak{D}$. A $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre $\delta > 0$ de manière que si

$$a \in A, \quad \|x - a\| < \delta$$

on ait

$$\|Tx - Ta\| < \varepsilon.$$

Si

$$\mathrm{Dist}(X, A) < \delta$$

à un point $a \in A$ correspond un point $x \in X$ tel que

$$\|x - a\| < \delta$$

et réciproquement. On a donc

$$\mathrm{Dist}(T(X), T(A)) < \varepsilon.$$

5. L'espace des compacts convexes

Proposition 5.1 *Si A est un convexe dans un espace de Banach $\mathfrak{B}$, $O_\varepsilon(A)$ l'est aussi.*

Prenons, en effet, deux points x et x' appartenant à $O_\varepsilon(A)$ et un point y du segment qui les joint. On peut extraire de A deux points a et a' tels que l'on ait

$$\|x - a\| < \varepsilon, \quad \|x' - a\| < \varepsilon.$$

y peut s'écrire

$$y = (1-t)x + tx'$$

avec $0<t<1$. D'après la convexité de A, le point

$$b=(1-t)a+ta'$$

lui appartient. y appartient donc à $O_\varepsilon(A)$ puisque $\|b-y\|<\varepsilon$.

Proposition 5.2 *L'ensemble* Conv $\mathfrak{B}$ *des compacts convexes est une partie fermée de* Comp $\mathfrak{B}$.

Soit $\{A_k\}$ une suite de compacts convexes qui converge vers un compact A, et considérons deux points a et b appartenant à A et un point c du segment qui les joint. Si k est assez grand, A est contenu dans $O_\varepsilon(A_k)$. Celui-ci étant convexe, c lui appartient. On a donc

$$\mathrm{dist}(c, A_k)<\varepsilon.$$

On en conclut que c appartient à A.

Appelons *enveloppe convexe* d'un compact A le plus petit ensemble convexe fermé contenant A et désignons-le par env A. Celui-ci est aussi compact.

Proposition 5.3 env *une application continue de* Comp $\mathfrak{B}$ *dans* Conv $\mathfrak{B}$.

Considérons en effet une suite de compacts $\{A_k\}$ convergeant vers un compact A. Il suffit de montrer que la suite $\{\mathrm{env}\, A_k\}$ converge vers env A.

ε désignant un nombre positif quelconque, on a

$$A_k\subset O_\varepsilon(A), \quad A\subset O_\varepsilon(A_k)$$

pour k assez grand. Celles-ci impliquent évidemment

$$A_k\subset O_\varepsilon(\mathrm{env}\, A), \quad A\subset O_\varepsilon(\mathrm{env}\, A_k).$$

Les seconds membres étant convexes, on a

$$\mathrm{env}\, A_k\subset \bar{O}_\varepsilon(\mathrm{env}\, A), \quad \mathrm{env}\, A\subset \bar{O}_\varepsilon(\mathrm{env}\, A_k).$$

On en conclut

$$\mathrm{Dist}(\mathrm{env}\, A_k, \mathrm{env}\, A)\leqq\varepsilon$$

ce qui suffit pour démontrer la convergence env $A_k\to$ env A.

6. Continuité de quelques opérations

Proposition 6.1 *L'union* $\cup$ *est une application continue de* Comp $\mathfrak{D}\times$ Comp $\mathfrak{D}$ dans Comp $\mathfrak{D}$.

Soit $\varepsilon>0$. Si $A_k\to A$, $B_k\to B$, on a

$$A_k\subset O_\varepsilon(A), \quad B_k\subset O_\varepsilon(B), \quad A\subset O_\varepsilon(A_k), \quad B\subset O_\varepsilon(B_k).$$

On en déduit

$$A_k\cup B_k\subset O_\varepsilon(A\cup B), \quad A\cup B\subset O_\varepsilon(A_k\cup B_k),$$

d'où résulte

$$\mathrm{Dist}(A_k\cup B_k, A\cup B)<\varepsilon.$$

On a donc

$$A_k\cup B_k\to A\cup B.$$

Proposition 6.2 *L'intersection* $\cap$ *est une application semi-continue supérieurement de* Comp $\mathfrak{D}\times$Comp $\mathfrak{D}$ *dans* Comp $\mathfrak{D}$.

Prenons deux compacts A et B. Si $A\subset B$, on a

$$O_\delta(A)\cap O_\delta(B)=O_\delta(A)=O_\delta(A\cap B),$$

d'où découle la semi-continuité supérieure de l'opération $\cap$ en (A, B).

Considérons maintenant le cas où l'on a

$$A\not\subset B, \quad A\cap B\neq 0.$$

Si $\varepsilon>0$ est assez petit, l'ensemble

$$A'=\{x\in A\,;\ x\notin O_\varepsilon(A\cap B)\}$$

est un compact non vide. Considérons un point quelconque

$$z\in O_\delta(A)\cap O_\delta(B).$$

Si δ est assez petit, on a

$$O_\delta(A')\cap O_\delta(B)=0.$$

z appartient donc à

$$z\in O_\delta(A-A')\subset O_{\varepsilon+\delta}(A\cap B).$$

On en conclut la semi-continuité supérieure de l'opération $\cap$.

Proposition 6.3 *L'addition* $+$ *est une application continue de* Comp $\mathfrak{B}\times$ Comp $\mathfrak{B}$ *dans* Comp $\mathfrak{B}$.

Supposons que l'on ait

$$\mathrm{Dist}(X, A)<\delta, \quad \mathrm{Dist}(Y, B)<\delta.$$

Si $c\in A+B$, on peut écrire

$$c=a+b, \quad a\in A, \quad b\in B.$$

Il existe dans X et Y des points x et y tels que

$$\|x-a\|<\delta, \quad \|y-b\|<\delta.$$

On en déduit

$$\|(x+y)-(a+b)\|<2\delta.$$

On a donc

$$A+B\subset O_{2\delta}(X+Y).$$

On a de même

$$X+Y\subset O_{2\delta}(A+B).$$

Proposition 6.4 *La multiplication d'un compact par un scalaire est une application continue de* $R^1\times$Comp $\mathfrak{B}$ *dans* Comp $\mathfrak{B}$.

Supposons que l'on ait

$$\mathrm{Dist}(X, A)<\delta, \quad |\lambda-\alpha|<\delta.$$

Si $c\in\alpha A$, on peut écrire

$$c=\alpha a, \quad a\in A.$$

Il existe dans X un point x tel que $\|x-a\|<\delta$ et $z=\lambda x$ appartient à λX.

Or on a

$$\|z-c\|\leqq\|\lambda(x-a)\|+\|(\lambda-\alpha)a\|<(|\alpha|+\delta+\|a\|)\delta.$$

Si donc on a

$$(|\alpha|+\|a\|+\delta)\delta<\varepsilon.$$

αA est contenu dans $O_\varepsilon(\lambda X)$. On voit de même l'inclusion

$$\lambda X \subset O_\varepsilon(\alpha A).$$

Proposition 6.5 *L'intersection* $\cap$ *restreinte à* Conv $R^n \times$ Conv R^n *est une application continue en* (A, B) *si* $A \cap B$ *contient des points intérieurs.*

Il suffit de démontrer la semi-continuité inférieure.

Par hypothèse $C = A \cap B$ est un compact convexe admettant des points intérieurs. C est donc la fermeture de l'intérieur C^0 de C. Si $\rho > 0$ est assez petit, l'ensemble $N_\rho(C)$ défini par

$$N_\rho(C) = \{x \in C\,;\ \operatorname{dist}(x, \partial C) \geqq \rho\}$$

est un compact convexe non vide, et on a

$$C^0 = \cup \{N_\rho(C)\,;\ \rho > 0\}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Nous voulons montrer que l'on a

$$C \subset O_\varepsilon(N_\rho(C))$$

pour $\rho > 0$ assez petit.

Supposons en effet le contraire. On pourrait alors extraire de C une suite de points $\{c_k\}$ telle que $c_k \notin O_\varepsilon(N_{\rho_k}(C))$ avec $\rho_k \downarrow 0$. On pourrait supposer $c_k \to c$ sans perdre la généralité. $O_{\varepsilon/2}(c)$ contiendrait au moins un point $c' \overline{\in} \partial C$.

c' appartiendrait à $N_{\rho_k}(C)$ pour $\rho_k < \operatorname{dist}(c', \partial C)$ et alors c appartiendrait à $O_{\varepsilon/2}(N_{\rho_k}(C))$. Si donc on a $\operatorname{dist}(c, c_k) < \varepsilon/2$, c_k appartiendrait à $O_\varepsilon(N_{\rho_k}(C))$ contrairement à notre hypothèse.

Cela posé, soient X et Y des compacts convexes tels que

$$\operatorname{Dist}(X, A) < \delta, \quad \operatorname{Dist}(Y, B) < \delta.$$

δ étant supposé assez petit, on a

$$X \supset N_\rho(A), \quad Y \supset N_\rho(B).$$

On a donc

$$A \cap B = C \subset O_\varepsilon(N_\rho(C)) \subset O_\varepsilon(N_\rho(A) \cap N_\rho(B)) \subset O_\varepsilon(X \cap Y). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Considérons maintenant l'application $R^n \cap \bar{O}_\rho$ qui fait correspondre à $A \in \operatorname{Comp} \mathfrak{D}$ le compact $R^n \cap \bar{O}_\rho(A)$ dans R^n. Nous dirons qu'elle est semi-continue supérieurement, c'est-à-dire on a la

Proposition 6.6 *L'application* $R^n \cap \bar{O}_\rho$ *est une application semi-continue supérieurement de* Comp $\mathfrak{D}$ *dans* Comp R^n.

En effet, si elle n'était pas semi-continue supérieurement en A, on pourrait trouver une suite $\{B_k\}$ convergeant vers A et telle que si l'on prend convenablement un point $b_k \in R^n \cap \bar{O}_\rho(B_k)$ la suite $\{b_k\}$ converge vers un point b n'appartenant pas à $R^n \cap \bar{O}_\rho(A)$, ρ désignant un nombre positif assez petit. La distance $\operatorname{dist}(b, A)$ serait donc plus grande que ρ et presque tous les B_k contiendraient des points distants de A plus de ε, ε désignant un nombre positif quelconque moindre que $\operatorname{dist}(b, A) - \rho$. La suite $\{B_k\}$ ne pourrait alors converger vers A, contrairement à l'hypothèse.

Proposition 6.7 *Si $\mathfrak{D}'$ est une partie fermée de $\mathfrak{D}$, l'application $\mathfrak{D}'\cap$, qui fait correspondre à $X\in$ Comp $\mathfrak{D}$, l'intersection $\mathfrak{D}'\cap X$, est semi-continue supérieurement.*

En effet, considérons une suite $\{A_k\}$ extraite de Comp $\mathfrak{D}$ et convergeant vers A. On a évidemment

$$\overline{\lim}\,(\mathfrak{D}'\cap A_k)\subset\mathfrak{D}'\cap A,$$

d'où résulte la semi-continuité supérieure de $\mathfrak{D}'\cap$.

7. Limites des suites monotones des applications semi-continues

Soient F et G des applications de $\mathfrak{D}$ dans Comp $\mathfrak{D}'$. Si l'on a $F(x)\subset G(x)$ pour tous les $x\in\mathfrak{D}$, F sera appelée *minorante* de G et G *majorante de* F. Nous écrirons dans ce cas $F\subset G$ ou $G\supset F$. Si $F(x)$ se trouve à l'intérieur $G^0(x)$ de $G(x)$ pour tous les $x\in\mathfrak{D}$, nous écrirons $F<G$ ou $G>F$. Alors F sera appelé *minorantes stricte* de G et G *majorante stricte* de F. Si une suite d'applications $\{F_k\}$ est telle que $F_k\subset F_{k+1}$ pour tous les entiers positifs k elle est dite *croissante*. Si l'on a l'inclusion inverse $F_k\supset F_{k+1}$, elle est dite *décroissante*. Une suite est dite monotone si elle est croissante ou décroissante.

Proposition 7.1 *Une suite décroissante d'applications semi-continues supérieurement de $\mathfrak{D}$ dans* Comp $\mathfrak{D}'$ *converge vers une application qui est aussi semi-continues suppérieurement.*

Soit $\{F_k\}$ une suite décroissante d'applications semi-continues supérieurement. D'après les propositions 1.2 et 3.2 la suite $\{F_k(x)\}$ converge vers un compact $F(x)$ en chaque point $x\in\mathfrak{D}$. Il suffit de démontrer la semi-continuité supérieure de l'application limite F.

Soient $a\in\mathfrak{D}$, $\varepsilon>0$. Si k est assez grand, on a

$$F_k(a)\subset O_\varepsilon(F(a))$$

et d'après la semi-continuité supérieure de F_k, on a

$$F_k(x)\subset O_\varepsilon(F_k(a))$$

pour $\mathrm{dist}(x,a)<\delta$, δ désignant un nombre positif assez petit. Ces deux inclusions impliquent

$$F_k(x)\subset O_{2\varepsilon}(F(a)),$$

et puisque $\{F_k\}$ est décroissante, on a

$$F(x)\subset O_{2\varepsilon}(F(a)).$$ C.Q.F.D.

Proposition 7.2 *Si une suite croissante d'applications semi-continues inférieurement de $\mathfrak{D}$ dans* Comp $\mathfrak{D}'$ *est majorée par une application semi-continue inférieurement de $\mathfrak{D}$ dans* Comp $\mathfrak{D}'$, *la suite converge vers une application qui est aussi semi-continue inférieurement.*

Soit $\{F_k\}$ une suite croissante d'applications semi-continues inférieurement majorée par une application semi-continue inférieurement G. D'après les propositions 1.2 et 3.2 la suite $\{F_k(x)\}$ converge vers un compact $F(x)$ en chaque point $x \in \mathfrak{D}$. Il suffit de démontrer la semi-continuité inférieure de l'application limite F.

Soient $a \in \mathfrak{D}$, $\varepsilon > 0$. Si k est assez grand, on a

$$F(a) \subset O_\varepsilon(F_k(a))$$

et, d'après la semi-continuité inférieure de F_k, on a

$$F_k(a) \subset O_\varepsilon(F_k(x))$$

pour $\operatorname{dist}(x, a) < \delta$, δ désignant un nombre positif assez petit. Ces deux inclusions impliquent

$$F(a) \subset O_{2\varepsilon}(F(x)),$$

puisque $F_k(x) \subset F(x)$. C.Q.F.D.

8. Composition des applications

Soient $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ des espaces distanciés complets, F une application de $\mathfrak{D}$ dans $\operatorname{Comp}\mathfrak{D}'$ et F' une application de $\operatorname{Comp}\mathfrak{D}'$ dans $\operatorname{Comp}\mathfrak{D}''$. En les composant, nous obtenons une application produit $G = F'F$ définie par

$$G(x) = F'(F(x)).$$

L'application F' est dite *croissante* ou *décroissante* suivant que l'inclusion $A \subset B$ implique $F(A) \subset F(B)$ ou $F(A) \supset F(B)$. L'application est dite *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Par exemple, l'application F de $\operatorname{Comp}\mathfrak{V} \times \operatorname{Comp}\mathfrak{V}$ dans $\operatorname{Comp}\mathfrak{V}$ définie par

$$F(X, Y) = \lambda X + \mu Y$$

est croissante.

Proposition 8.1 *Si F et F' sont semi-continues supérieurement (inférieurement) et si de plus la seconde est croissante, l'application produit $G = F'F$ est aussi semi-continue supérieurement (inférieurement).*

1° Considérons le cas où F et F' sont semi-continues supérieurement. Soient $a \in \mathfrak{D}$, $\delta > 0$. D'aprés la semi-continuité supérieure de F, on a

$$F(x) \subset O_\delta(F(a)) \tag{1}$$

pour x assez voisin de a. On peut faire correspondre à $\varepsilon > 0$ donné, le nombre δ de manière que l'on ait

$$F'(X) \subset O_\varepsilon(F'(F(a))) \tag{2}$$

pour

$$\operatorname{Dist}(X, F(a)) \leqq \delta. \tag{3}$$

Si l'on pose

$$X = F(x) \cup F(a), \tag{4}$$

on a (3) et par suite (2). Grâce à la croissance de F', on a

$$G(x)=F'(F(x))\subset F'(X)$$

et puis, d'après (2),

(5) $$G(x)\subset O_\varepsilon(F'(F(a)))=O_\varepsilon(G(a)).$$ C.Q.F.D.

2° Dans le cas où F et F' sont semi-continues inférieurement, il suffit de remplacer, dans la démonstration ci-dessus, les inclusions (1) et (2) par les suivantes:

(1)' $$F(a)\subset O_\delta(F(x)),$$

(2)' $$F'(F(a))\subset O_\varepsilon(F'(X)),$$

et de définir X par

(4)' $$X=F(x)\cap \bar{O}_\delta(F(a))$$

au lieu de (4).

Proposition 8.2 *Si l'application F est continue et l'application F' semi-continue supérieurement (inférieurement), l'application produit $G=F'F$ est aussi semi-continue supérieurement (inférieurement).*

Considérons par exemple le cas de F' semi-continue supérieurement.

Soient $a\in\mathfrak{D}$, $\delta>0$. D'après la continuité de F, on a

(6) $$\mathrm{Dist}(F(a), F(x))\leqq\delta$$

pour x assez voisin de a. On peut faire correspondre à $\varepsilon>0$ donnée, le nombre δ de manière que l'on ait (2) pour (3). Puisqu'on a (6), on peut prendre $X=F(x)$. On a donc l'inclusion (5).

9. Lemmes

Considérons une application semi-continue supérieurement F d'une partie fermée E de R^n dans $\mathrm{Conv}\, R^n$. ε et ρ désignant des nombres positifs quelconques, on peut définir une fonction δ définie et positive dans E de manière que l'on ait $\delta(x)<\rho$ pour $x\in E$ et

$$F(x')\subset O_\varepsilon(F(x))$$

pour $x'\in E$, $||x-x'||<2\delta(x)$. On peut ensuite construire un ensemble A ne contenant que des points isolés de manière que

$$E\subset \cup\{O_{\delta(a)}(a)\,;\ a\in A\}.$$

A chaque point $x\in E$ correspond un ensemble non vide

$$A(x)=\{a\in A\,;\ x\in\bar{O}_{\delta(a)}(a)\},$$

et puisque $\delta(x)<\rho$, $A(x)$ est un ensemble fini contenu dans $O_\rho(x)$. Désignons par $A_1, A_2, \cdots$ les parties finies de A telles que

$$E_i=\{x\in E\,;\ A(x)=A_i\}$$

ne soit pas vide. On a alors

$$E_i\subset \cap\{\bar{O}_{\delta(a)}(a)\,;\ a\in A_i\}.$$

Lemme 1. *Si $A_i\not\subset A_j$, E_i est une partie femée de $E_i\cup E_j$.*

Il suffit de montrer que E_j est une partie ouverte de $E_i \cup E_j$. Soit $x \in E_j$. Puisque

$$A_j = A(x) = \{a \in A\,;\ x \in \bar{O}_{\delta(a)}(a)\},$$

si l'on avait $x \in \bar{O}_{\delta(a)}(a)$ pour tous les $a \in A_i$, on aurait $A_i \subset A_j$ contrairement à l'hypothèse. Il existe donc un point $a \in A_i$ tel que $\|x-a\| > \delta(a)$. On aura alors $\|x'-a\| > \delta(a)$ pour x' assez voisin de x et x' ne pourra appartenir à E_i.

C.Q.F.D.

Si l'on a $A_i \not\subset A_j$, $A_j \not\subset A_i$ à la fois, E_i et E_j sont des parties fermées disjointes de $E_i \cup E_j$ et on a

$$E_i \cap \bar{E}_j = 0, \quad \bar{E}_i \cap E_j = 0.$$

Si l'on n'a pas l'une de ces relations, soit la première par exemple, A_j est contenu dans A_i, et puisqu'on suppose $i \neq j$, A_i n'est pas contenu dans A_j, et la seconde en est satisfaite. Par conséquent

Lemme 2. *$E_i \cap \bar{E}_j \neq 0$, $(i \neq j)$, implique*

$$\bar{E}_i \cap E_j = 0, \quad A_j \subset A_i.$$

Démontrons maintenant le

Lemme 3. *L'ensemble*

$$E_i' = \{x \in E\,;\ A(x) \not\subset A_i\}$$

est une partie fermée de E.

Supposons le contraire, c'est-à-dire l'existence d'une suite de points $\{x_r'\}$ extraite de E_i' et convergeant vers un point $x' \notin E_i'$. Si j est l'indice tel que $A_j = A(x')$, on aurait $A_j \subset A_i$. Les indices k tels que E_k contienne un nombre infini de points x_r' seraient en nombre fini et on pourrait supposer, sans nuir à la généralité, l'existence d'un indice k tel que l'on ait $x_r' \in E_k$ pour tous les r. x' appartient à $E_j \cap \bar{E}_k$ et, d'après le lemme 2, on aurait $A_k \subset A_j$. A_i contiendrait donc $A_k = A(x_r')$. Il en résulterait $x_r' \notin E_i'$ contrairement à l'hypothèse.

10. Démonstration du théorème fondamental

Démontrons maintenant le théorème fondamental qui s'énonce comme il suit.

Théorème. *Si F est une application semi-continue supérieurement d'une partie fermée E de R^m dans* Conv R^n, *il existe une suite décroissante d'applications continues de E dans* Conv R^n : $\{G_k\}$ *convergeant vers F et telle que $G_k > F$ c'est-à-dire $G_k(x)$ contienne $F(x)$ à son intérieur pour $x \in E$.*

L'ensemble

$$E_i'' = \{x \in E\,;\ \exists a \in A_i \text{ tel que } \|x-a\| \geqq 2\delta(a)\}$$

est une partie fermée de E puisque A_i est un ensemble fini. E_i' aussi étant fermé, la fonction μ_i définie par

$$\mu_i(x) = \mathrm{dist}(x, E_i' \cup E_i'')$$

est continue dans E, nulle dans $E_i' \cup E_i''$ et positive dans $E-(E_i' \cup E_i'')$. On a en particulier $\mu_i(x)>0$ pour $x \in E_i$ puisque $E_i' \cup E_i''$ ne contient aucun point de E_i. Par suite $\sum \mu_i(x)$ est positive dans E.

Posons

$$B_i = \cap \{\bar{O}_\varepsilon(F(a))\ ;\ a \in A_i\},$$
$$G(x) = \sum \mu_j(x) B_j / \sum \mu_j(x).$$

B_i est évidemment un compact convexe, et G est une application continue de E dans Conv R^n.

Si $\mu_j(x)>0$, x n'appartient pas à E_j'. Si $A(x)=A_i$, on a $A_i \subset A_j$ et par suite $B_j \subset B_i$. On a par conséquent

$$G(x) \subset B_i.$$

Par suite

$$G(x) \subset \bar{O}_\varepsilon(F(a))$$

pour $a \in A_i$.

Puisque $\mu_j(x)>0$ implique $x \notin E_j''$, on a $||x-a|| < 2\delta(a)$ pour tous les $a \in A_j$. Il en résulte

$$F(x) \subset O_\varepsilon(F(a)).$$

Donc $F(x)$ se trouve à l'intérieur de B_j pour tous les j tels que $\mu_j(x)>0$. On a par conséquent $F<G$. L'application G définie tout à l'heure jouit de la propriété suivante:

G est une application continue de E dans Conv R^n *telle que $G>F$ et à chaque point $x \in E$ on peut faire correspondre un point $a \in E$ tel que l'on ait*

$$||x-a|| \leqq \rho, \quad G(x) \subset \bar{O}_\varepsilon(F(a)).$$

Considérons deux suites décronissantes $\{\varepsilon_k\}$, $\{\rho_k\}$ convergeant respectivement vers 0. En prenant pour ε, ρ les nombres ε_k, ρ_k nous obtenons une application G_k. Nous pouvons supposer la suite $\{G_k\}$ décroissante, car sinon, il suffit de remplacer G_k par $G_1 \cap \cdots \cap G_k$ qui est aussi continue d'après la proposition 6.5. La suite $\{G_k\}$ converge vers F et le théorème est établi.

11. Application compacte et semi-continue supérieurement

Une application F est dite *compacte* si l'image de son domaine est contenu dans un compact.

Proposition 11.1 *Si F est une application compacte et semi-continue supérieurement d'une partie fermée E de $\mathfrak{B}$ dans* Comp $\mathfrak{B}$, *l'image de E par $I-F$:*

$$(I-F)(E) = \cup \{(I-F)x\ ;\ x \in E\}$$

est un ensemble fermé.

En effet, supposons qu'une suite $\{y_k\}$ extraite de $(I-F)(E)$ converge vers y. Il existe dans E un point x_k tel que $y_k \in (I-F)x_k$. E'après la compacité de l'application F, on peut extraire de la suite $\{x_k-y_k\}$ une suite partielle convergente $\{x_k'-y_k'\}$. La suite $\{y_k'\}$ étant une suite partielle d'une suite convergente elle l'est aussi et par suite la suite $\{x_k'\}$ est convergente. Si x est le point limite de celle-ci la semi-continuité supérieure de F entraîne

$$x-y\in F(x),$$

d'où

$$y\in(I-F)x. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Proposition 11.2 *Soit F une application compacte et semi-continue supérieurement d'une partie fermée E de $\mathfrak{V}$ dans* Comp $\mathfrak{V}$. *Si B est un compact contenu dans $(I-F)(E)$, l'ensemble*

$$A=\{x\in E;\ (I-F)x\cap B\neq 0\}$$

est un compact.

On voit immédiatement que A est un ensemble fermé. Il suffit donc de prouver que l'on peut extraire d'une suite quelconque $\{a_k\}$ extraite de A une suite partielle convergente.

Soient

$$a_k\in A,\quad b_k\in(I-F)a_k\cap B.$$

B étant compact, on peut extraire de la suite $\{b_k\}$ une suite partielle convergente $\{b_k'\}$. Soit $\{a_k'\}$ la suite partielle correspondante de $\{a_k\}$. Puisque

$$a_k'-b_k'\in F(a_k'),$$

on peut supposer la convergence de la suite $\{a_k'-b_k'\}$ sans perdre la généralité. Alors la suite $\{a_k'\}$ est aussi convergente.

12. Application dépendant d'un paramètre

Proposition 12.1. *Soit F une application semi-continue supérieurement de $\mathfrak{D}$ dans* Comp $\mathfrak{D}'$. *Si $\mathfrak{D}$ est compact,*

$$E=\cup\{F(x);\ x\in\mathfrak{D}\}$$

l'est aussi.

Considérons en effet une suite de points $\{y_k\}$ extraite de E. On peut extaire de $\mathfrak{D}$ un point x_k dont l'image par F contient y_k. De la suite $\{x_k\}$ on peut extraire une suite partielle convergente $\{x_k'\}$. Soit $\{y_k'\}$ la suite partielle correspondante de $\{y_k.\}$. Si x' est le point limite de la suite $\{x_k'\}$, $O_\varepsilon(F(x'))$ contient presque tous les points y_k' quelque petit que soit le nombre positif ε.

Appliquons la proposition 2.1 en prenant $\bar{O}_\varepsilon(F(x'))$ pour C_ε et l'ensemble ne contenant que y_k' pour A_k. $\overline{\lim}\,A_k$ n'étant pas vide, on peut extraire de la suite $\{y_k'\}$ une suite partielle convergente. Son point limite appartient à $F(x')$.

Soit $\mathfrak{T}$ un espace distancié compact. Nous désignerons par $\mathfrak{J}$ l'application de $\mathfrak{T}\times\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{V}$ défini par

$$\mathfrak{J}(t,x)=x.$$

On a alors la

Proposition 12.2 *Soit E une partie fermée de $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{F}$ une application compacte et semi-continue supérieurement de $\mathfrak{T}\times E$ dans* Comp $\mathfrak{V}$. *Si une partie compacte B_t de*

$$(\mathfrak{I}-\mathfrak{F})(t, E) = \cup\{(\mathfrak{I}-\mathfrak{F})(t, x);\ x\in E\}$$

dépend de t d'une manière semi-continue supérieurement, il en est de même de l'ensemble

$$A_t = \{x\in E;\ (\mathfrak{I}-\mathfrak{F})(t, x)\cap B_t \neq 0\}.$$

Si l'on fixe la valeur de t, on peut appliquer la proposition 11.2. A_t est donc un compact pour chaque $t\in T$. Si A_t ne dépendait pas de t d'une manière semi-continue supérieurement, on pourrait trouver une suite $\{t_k\}$ convergeant vers une valeur $\tau\in\mathfrak{T}$ et telle que

$$A_{t_k}\not\subset O_\varepsilon(A_\tau)$$

pour une certaine valeur positive ε. Soit x_k un point de A_{t_k} n'appartenant pas à $O_\varepsilon(A_\tau)$. Si l'on prenait un point

$$y_k\in B_{t_k}\cap(\mathfrak{I}-\mathfrak{F})(t_k, x_k),$$

x_k-y_k appartiendrait à $\mathfrak{F}(t_k, x_k)$, et d'après la compacité de $\cup B_t$ et de $\mathfrak{F}$, on pourrait supposer, sans perdre la généralité, que les suites $\{y_k\}$ et $\{x_k-y_k\}$ convergent. La suite $\{x_k\}$ aussi convergerait et le point limite y de la suite $\{y_k\}$ appartiendrait à

$$B_\tau\cap(\mathfrak{I}-\mathfrak{F})(\tau, x),$$

x désignant le point limite de la suite $\{x_k\}$. On aurait donc $x\in A_\tau$, tandis que $x_k\notin O_\varepsilon(A_\tau)$. Ainsi on arrive à une contradiction.

13. Définition du degré topologique ; cas de l'espace R^n

Considérons une application F compacte et semi-continue supérieurement d'une partie fermée E de R^n dans Conv R^n. Nous supposerons que $x\notin F(x)$ pour $x\in\partial E$.

Soit G une application continue et compacte de E dans Conv R^n, *satisfaisant à la condition suivante* :

$$G > F \quad \text{et} \quad x\notin G(x) \quad \text{pour} \quad x\in\partial E.$$

Si G' satisfait à la même condition, l'application $G''=G\cap G'$ définie par

$$G''(x)=G(x)\cap G'(x)$$

est évidemment compacte. D'après la proposition 6.5, G'' est continue. G'' satisfait donc à la même condition que G.

On voit immédiatement que l'application G_t définie par

$$G_t=(1-t)G+tG''$$

satisfait à la même condition pour $t\in[0, 1]$. Soit $g_t(x)$ le barycentre de $G_t(x)$ Puisque $g_t(x)\in G_t(x)$ pour $x\in E$, on a

$$x \neq g_t(x)$$

pour $x \in \partial E$. $g_t(x)$ considérée comme fonction de (t, x) est une application continue de $[0, 1] \times E$ dans Conv R^n. Par suite le degré topologique $d(o, I-g_t, E)$ est indépendant de t. Si nous désignons par $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$ respectivement les barycentres de $G(x)$, $G'(x)$, $G''(x)$, on a évidemment $g_0 = g$, $g_1 = g''$, et puis

$$d(o, I-g, E) = d(o, I-g'', E).$$

On voit de même

$$d(o, I-g', E) = d(o, I-g'', E).$$

Par conséquent, la valeur $d(o, I-g, E)$ est indépendante du choix de G. Elle est par définition le degré topologique de l'application $E-F$ de E en o:

$$d(o, I-F, E) = d(o, I-g, E).$$

Pour que cette définition soit légitime, il faut montrer l'existence de l'application G.

D'après la proposition 11. 2,

$$A = \{x \in E\,;\; o \in (I-F)x\}$$

est un compact. Il ne contient aucun point de ∂E. La distance

$$2\delta = \mathrm{dist}(\partial E, A)$$

est donc positive. Alors $x \notin F(x)$ pour $x \in \bar{O}_\delta(\partial E)$ et $(I-F)(\bar{O}_\delta(\partial E))$ est un ensemble fermé ne contenant pas o. La distance

$$\sigma = \mathrm{dist}(o, (I-F)(\bar{O}_\delta(\partial E)))$$

est positive. Soit G une application satisfaisant à la condition énoncée au n⁰ 10, ε et ρ étant des nombres positifs tels que $\rho + \varepsilon < \sigma$, $\rho < \delta$.

Si $x \in \partial E$, a appartient à $O_\delta(\partial E)$ et on a

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(x, G(x)) &> \mathrm{dist}(a, F(a)) - \varepsilon - \rho \\ &\geqq \sigma - \varepsilon - \rho > 0. \end{aligned}$$

On en conclut que $x \notin G(x)$ pour tous les $x \in \partial E$. C.Q.F.D.

Le *degré topologique en* b: $d(b, I-F, E)$ est défini par

$$d(b, I-F, E) = d(o, I-(F+b), E),$$

où $F+b$ représente l'application définie par

$$(F+b)x = F(x) + b = \{y+b\,;\; y \in F(x)\}.$$

14. Propriétés du degré topologique; cas de l'espace R^n

1° *Si le degré topologique* $d(b, I-F, E)$ *est différent de* 0, *il existe au moins un point* $x \in E$ *tel que* $b \in (I-F)x$.

Nous supposons $b = o$, sinon il suffirait de considérer $F-b$ au lieu de F.

Si F est continue, et si $F(x)$ admet des points intérieurs pour chaque $x \in E$, le barycentre $f(x)$ de $F(x)$ est une fonction continue de x dans E. Le degré topologique $d(o, I-f, E)$ étant égal à $d(o, I-F, E)$, il est différent de 0. Il existe donc un point fixe x où l'on a la relation $x=f(x)$. Puisque $f(x)\in F(x)$, on a $x\in F(x)$ ou $o\in(I-F)x$.

Considérons le cas où F est semi-continue supérieurement. Prenons une suite $\{G_k\}$ satisfaisant à la condition énoncée dans le théorème fondamental. On a alors

$$d(o, I-G_k, E)=d(o, I-F, E)$$

pour tous les k, en supprimant, s'il est nécessaire, un nombre fini de termes dans la suite. Il existe au moins un point $x_k\in E$ tel que $x_k\in G_k(x_k)$. On peut lui faire correspondre un point $a_k\in E$ tel que

$$\|x_k-a_k\|\leqq\rho_k,\quad G_k(x_k)\subset\bar{O}_{\varepsilon_k}(F(a_k)).$$

Il existe dans $F_k(a_k)$ un point b_k tel que

$$\|x_k-b_k\|\leqq\varepsilon_k.$$

On peut extraire de la suite $\{b_k\}$ une suite partielle convergente $\{b_k'\}$. Les suites $\{\varepsilon_k\}$ et $\{\rho_k\}$ convergeant vers 0, les suites partielles correspondantes $\{x_k'\}$ et $\{a_k'\}$ des suites $\{x_k\}$ et $\{a_k\}$ convergent vers le même point x que la suite $\{b_k'\}$ et, d'après la semi-continuité supérieure de F, on a $x\in F(x)$.

2° *Soient A et B des parties fermées de E dont la réunion coïncide avec E. Si b n'appartient pas à*

$$(I-F)(\partial E)\cup(I-F)(A\cap B),$$

on a

$$d(b, I-F, E)=d(b, I-F, A)+d(b, I-F, B).$$

Si F est continue et si $F(x)$ admet des points intérieurs pour chaque $x\in E$, la relation devient une égalité connue. Si F est semi-continue supérieurement, on prend une suite $\{G_k\}$ satisfaisant à la condition énoncée dans le théorème fondamental. La relation à démontrer devient l'égalité

$$d(b, I-G_k, E)=d(b, I-G_k, A)+d(b, I-G_k, B),$$

qui est vraie puisque G_k est continue et que $G_k(x)$ admet des points intérieurs pour chaque $x\in E$.

3° *Soit $\mathfrak{T}$ un espace distancié compact et connexe et $\mathfrak{F}$ une application compacte semi-continue supérieurement de $\mathfrak{T}\times E$ dans* Conv R^n. *A chaque $t\in\mathfrak{T}$ on peut faire correspondre une application F_t de E dans* Conv R^n *définie par*

$$F_t(x)=\mathfrak{F}(t, x).$$

Si $b\notin(I-F_t)(\partial E)$ pour tous les $t\in\mathfrak{T}$, le degré topologique $d(b, I-F_t, E)$ est indépendant de t.

Il suffit de montrer que $d(b, I-F_t, E)$ garde une valeur constante dans un voisinage de chaque $\tau\in\mathfrak{T}$. Nous pouvons supposer $b=0$ sans perdre la généralité. L'ensemble

$$A_t=\{x\in E\,;\ x\in F_t(x)\}$$

est un compact ne contenant aucun point de ∂E pour $t\in\mathfrak{T}$ et d'après la proposition 12.2, il dépend de t d'une manière semi-continue supérieurement.

Prenons une application G continue et compacte de E dans Conv R^n satisfaisant à la condition suivante :

$$G > F_\tau \quad \text{et} \quad o \notin (I-G)(\partial E).$$

A_τ étant compact, on a $G(x) \supset F_t(x)$ pour $x \in \bar{O}_\delta(A_\tau)$, $t \in O_\rho(\tau)$ pourvu que δ et ρ soient assez petits. On peut supposer que $A_t \subset O_\delta(A_\tau)$ pour $t \in O_\rho(\tau)$. On a alors

$$d(o, I-F_t, E) = d(o, I-F_t, \bar{O}_\delta(A_\tau)) + d(o, I-F_t, E - O_\delta(A_\tau)).$$

Or on a

$$d(o, I-F_t, E - O_\delta(A_\tau)) = 0,$$
$$d(o, I-F_t, \bar{O}_\delta(A_\tau)) = d(o, I-G, \bar{O}_\delta(A_\tau)).$$

On en conclut que $d(o, I-F_t, E)$ est indépendant de t pour $t \in O_\rho(\tau)$.

4° *Si $F(x)$ est contenu dans R^m $(m < n)$ ainsi que b, on a*

$$d(b, I-F, E \cap R^m) = d(b, I-F, E).$$

Considérons d'abord le cas où F est continue et $F(x)$ considéré dans R^m contient des points intérieurs pour chaque $x \in E$. Si $f(x)$ est le barycentre de $F(x)$, $f(x)$ appartient à R^m et on a

$$\begin{aligned} d(b, I-F, E \cap R^m) &= d(b, I-f, E \cap R^m) \\ &= d(b, I-f, E) \\ &= d(b, I-F, E). \end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas général. On peut trouver une application continue telle que

$$b \notin (I-G)(\partial E),$$

et que l'on ait $G > F$ comme application de E dans Conv R^m. On a alors

$$\begin{aligned} d(b, I-F, E \cap R^m) &= d(b, I-G, E \cap R^m) \\ &= d(b, I-G, E) \\ &= d(b, I-F, E). \end{aligned}$$

15. Définition du degré topologique ; cas de l'espace $\mathfrak{B}$

Considérons maintenant une application F compacte et semi-continue supérieurement d'une partie fermée E de $\mathfrak{B}$ dans Conv $\mathfrak{B}$, et supposons que l'on ait

$$o \notin (I-F)(\partial E).$$

Le second membre de cette relation étant un ensemble fermé, la distance

$$\delta = \operatorname{dist}(o, (I-F)(\partial E))$$

est positive. *Soit F' une application compacte et semi-continue supérieurement de E dans* Conv $\mathfrak{B}'$ *et telle que*

$$\operatorname{Dist}(F(x), F'(x)) < \delta$$

pour $x \in E$, où $\mathfrak{B}'$ est un sous-espace à dimension finie de $\mathfrak{B}$.

Pour que l'on puisse définir le degré topologique $d(o, I-F, E)$ par

$$d(o, I-F, E)=d(o, I-F', E\cap\mathfrak{B}').$$

Il faut d'abord montrer l'existance des applications F' et puis vérifier que la valeur $d(o, I-F', \cap\mathfrak{B}')$ est indépendante du choix de F'.

Soit C un compact qui contient $F(E)$. On peut définir une application continue T qui transforme chaque point $x\in C$ en un point Tx tel que

$$Tx\in\mathfrak{B}', \quad ||\, Tx-x\,|| < \delta,$$

$\mathfrak{B}'$ étant un sous-espace à dimension finie convenablement choisi. env étant une application croissante, l'application

$$F'=\text{env } T\cdot F$$

est aussi semi-continue supérieurement. Puisque

$$\text{Dist}(F(x), TF(x)) < \delta$$

implique

$$\text{Dist}(F(x), F'(x)) < \delta,$$

F' remplit la condition voulue.

Soit F'' une application compacte et semi-continue supérieurement de E dans $\text{Conv}\,\mathfrak{B}''$ et telle que

$$\text{Dist}(F(x), F''(x)) < \delta$$

pour chaque $x\in E$, où $\mathfrak{B}''$ est un sous-espace à dimension finie de $\mathfrak{B}$. On peut supposer $\mathfrak{B}'=\mathfrak{B}''$ sans perdre la généralité, car, d'après 4° du n° 14, on a

$$d(o, I-F', E\cap\mathfrak{B}')=d(o, I-F', E\cap\mathfrak{B}'+\mathfrak{B}'')),$$

$$d(o, I-F'', E\cap\mathfrak{B}'')=d(o, I-F'', E\cap\mathfrak{B}'+\mathfrak{B}'')).$$

Il suffit donc de prendre $\mathfrak{B}'+\mathfrak{B}''$ au lieu de $\mathfrak{B}'$ et de $\mathfrak{B}''$. Puisque env et $\cup$ sont des applications croissantes,

$$G=\text{env}\,(F'\cup F'')$$

est aussi une application semi-continue supérieurement de E dans $\text{Conv}\,\mathfrak{B}'$. Les inclusions

$$F'(x)\subset O_\delta(F(x)), \quad F''(x)\subset O_\delta(F(x))$$

impliquent

$$G(x)\subset O_\delta(F(x)).$$

On a d'autre part

$$O_\delta(G(x))\supset O_\delta(F(x))\supset F(x).$$

On a par suite

$$\text{Dist}(F(x), G(x)) < \delta.$$

Or la compacité de F' et de F'' entraîne celle de G. G satisfait donc à la même condition que F'. L'application

$$G_t=(1-t)F'+tG$$

satisfait aussi à la même condition pour $0\leqq t\leqq 1$ et puisque

$$d(o, I-G_t, E\cap\mathfrak{B}')$$

garde une valeur constante pour $t\in[0, 1]$, on a

$$d(o, I-F', E\cap\mathfrak{B}') = d(o, I-G, E\cap\mathfrak{B}').$$

On voit de même

$$d(o, I-F'', E\cap\mathfrak{B}') = d(o, I-G, E\cap\mathfrak{B}')$$

On a donc l'égalité à démontrer :

$$d(o, I-F', E\cap\mathfrak{B}') = d(o, I-F'', E\cap\mathfrak{B}'').$$

16. Propriétés du degré topologique ; cas de l'espace $\mathfrak{B}$

1° Supposons

$$d(o, I-F, E) \neq 0.$$

Si l'on prend l'application F' du n^0 15, on a

$$d(o, I-F', E\cap\mathfrak{B}') \neq 0,$$

$\mathfrak{B}'$ étant un sous-espace à dimension finie. Il existe donc un point fixe pour F'. Ce point fixe satisfait à inégalité

$$\mathrm{dist}(x, F(x)) < \delta$$

Soit $\delta_k \downarrow 0$. existe un point a_k tel que

$$\mathrm{dist}(a_k, F(a_k)) < \delta_k.$$

Soit b_k un point de $F(a_k)$ qui est distant de a_k moins de δ_k. On peut extraire de la suite $\{b_k\}$ une suite partielle convergente $\{b_k\}$. Son point limite a est en même temps le point limite de la suite partielle correspondante de $\{a_k\}$. D'après la semi-continuité supérieure de F, a appartient à $F(a)$.

D'une manière générale, *si*

$$d(b, I-F, E) \neq 0,$$

il existe un point $a \in E$ tel que $a-b \in F(a)$.

2° *Soient A et B des parties fermées de E dont la réunion coïncide avec E. Si b n'appartient pas à*

$$(I-F)(\partial E) \cup (I-F)(A\cap B),$$

on a

$$d(b, I-F, E) = d(b, I-F, A) + d(b, I-F, B).$$

3° *Soit $\mathfrak{T}$ un espace distancié compact et connexe et F une application compacte semi-continue supérieurement de $\mathfrak{T}\times E$ dans* Conv $\mathfrak{B}$. *A chaque $t\in\mathfrak{T}$ on peut faire correspondre une application F_t de E dans* Conv $\mathfrak{B}$ *définie par*

$$F_t(x) = \mathfrak{F}(t, x).$$

Si $b \notin (I-F_t)(E)$ pour tous les $t\in\mathfrak{T}$, le degré topologique $d(b, I-F_t, E)$ est indépendant de t.

4° *Si $F(x)$ est contenue dans un sous-espace fermé $\mathfrak{B}'$ ainsi que b, on a*

$$d(b, I-F, E\cap\mathfrak{B}') = d(b, I-F, \mathfrak{B}).$$

On peut vérifier ces propriétés en réduisant le problème au cas de l'espace à dimension finie, comme nous avons fait ci-dessus.

17. Théorème de Kakutani

Proposition 17.1 *Soit D un ouvert convexe dans $\mathfrak{B}$ et F une application compacte et semi-continue supérieurement de $\bar{D}$ dans* Conv $\mathfrak{B}$ *et telle que*

$$(1) \qquad (I-F)(\bar{D}) \subset \bar{D}.$$

Si l'on a

$$(2) \qquad o \notin (I-F)(\partial D),$$

le degré topologique $d(o, I-F, \bar{D})$ est égal à 1.

Nous supposons $o \in D$, sinon il suffit de considérer au lieu de F l'application F' définie par

$$F'(x) = F(x+a) - a,$$

a désignant un point de D.

La fonction σ définie par

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in E \\ \sup\{\lambda > 0\,;\ \lambda x \in D\} & \text{pour } x \notin E \end{cases}$$

est continue dans tout l'espace $\mathfrak{B}$. Si donc on pose

$$F(x) = F(\sigma(x)x)$$

pour $x \notin E$, F devient une application compacte et semi-continue supérieurement de $\mathfrak{B}$ dans Conv $\mathfrak{B}$. On a de plus $x \notin F(x)$ pour $x \notin \bar{D}$. Par suite, si E est le δ-voisinage fermé de D, on a

$$d(o, I-F, E) = d(o, I-F, \bar{D}) + d(o, I-F, E-D) = d(o, I-F, \bar{D}),$$

puisque o n'appartient pas à $(I-F)(E-D)$.

Cela posé, considérons le cas où $\mathfrak{B}$ est à dimension finie et prenons une application G satisfaisant à la condition énoncée au n° 10. Si $g(x)$ est le barycentre de $G(x)$, g est continue dans E et $g(x)$ appartient à l'intérieur E^0 de E. On a donc

$$\begin{aligned} d(o, I-F, E) &= d(o, I-G, E) \\ &= d(o, I-g, E) = 1. \end{aligned}$$

Si $\mathfrak{B}$ est à dimension infinie, nous prenons pour F' une application compacte et semi-continue supérieurement de E dans Conv $\mathfrak{B}'$ telle que

$$\operatorname{Dist}(F(x), F'(x)) < \delta$$

pour $x \in E$, où $\mathfrak{B}'$ est un sous-espace à dimension finie. On a alors

$$F'(x) \subset E^0$$

pour $x \in E$. On a par suite

$$d(o, I-F, E) = d(o, I-F', E) = 1.$$

La proposition est donc établie.

Proposition 17.2 *Soit D un ouvert convexe de $\mathfrak{B}$ et F une application compacte et semi-continue supérieurement de $\bar{D}$ dans* Conv $\mathfrak{B}$ *et telle que*

$$(I-F)(\bar{D}) \subset \bar{D}.$$

Il existe alors un point fixe, c'est-à-dire un point x tel que $x \in F(x)$.

Il suffit de considérer seulement le cas où l'on a (2). On a alors

$$d(o, I-F, \bar{D})=1,$$

et d'après une des propriétés du degré topologique, il existe un point fixe dans D.

Proposition 17.3 *Soit E un compact convexe dans $\mathfrak{B}$ et une application semi-continue supérieurement de E dans* Conv $\mathfrak{B}$. *Si $F(E) \subset E$, il existe alors un point fixe, c'est-à-dire un point x tel que l'on ait $x \in F(x)$.*

En effet, prenons une sphère ouverte D qui contient E. Posons

$$F(x)=\text{env} \cup \{F(y);\ y \in E, \text{dist}(x, y)=\text{dist}(x, E)\}$$

pour $x \in \bar{D}$ n'appartenant pas à E. F devient alors une application semi-continue supérieurement de $\bar{D}$ dans Conv $\mathfrak{B}$ et la valeur est toujours comprise dans E. La proposition 17.2 est donc applicable. Si $x \notin E$, x n'appartient pas à $F(x)$. Donc le point fixe appartient nécessairement à E.

Note. Nous avons généralisé le théorème de points fixes [2] et la notion du degré topologique d'une transformation point à point [4] au cas de l'espace topologique linéaire localement convexe. La méthode s'appliquera à la transformation point à compact convexe. On pourra alors définir le degré topologique d'une transformation point à compact convexe au cas de l'espace topologique linéaire localement convexe. Le théorème de Ky Fan [1], qui est la généralisation du théorème de points fixes de S. Kakutani [3], en se déduira sans difficulté.

Bibliographie

[1] Ky Fan, Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces. Proc. Nat. Acad., **38** (1952), 121–126.

[2] M. Hukuhara, Sur l'existence des points invariants d'une transformation dans l'espace fonctionnel. Japan. J. Math., **20** (1950), 1–4.

[3] S. Kakutani, A generalization of Brouwer's fixed point theorem. Duke Math. J., **8** (1941), 457–459.

[4] M. Nagumo, Degree of mapping in convex linear topological spaces. Amer. J. Math., **73** (1951), 497–511.

(Ricevita la 12-an de oktobro, 1966)