Funkcialaj Ekvacioj, 1 (1962), 57—81

Transformo de Euler kaj ĝia aplikado al la diferencialaj ekvacioj de Fuchsa tipo, I; Integralo de Riemann-Liouville en la kompleksa kampo

de Masuo HUKUHARA

(Universitato de Tokyo)

Kiel oni scias, J. Hadamard [1] solvis tre lerte la problemon de Cauchy por la parta diferenciala ekvacio de hiperbola tipo, utiligante la finitan parton de diverĝa integralo. Malgraŭ lia superanta tekniko, li devis distingi du kazojn laŭ la pareco de la dimensio. M. Riesz [6, 7] sukcesis forigi tiun maloportunecon, utiligante la integralon de Riemann-Liouville.

Aliparte, la transformo de Euler estas tre utila rimedo por studi la linearan diferencialan ekvacion de Fuchsa tipo. Ĉe tiu transformo, ni prenas por integrovojo kurbon finiĝantan ĉe singulaj punktoj de ia integrota funkcio. Pro tio oni renkontas diverĝan integralon. Por eviti la uzadon de diverĝa integralo, oni anstataŭigas la kurbon finiĝantan ĉe singulaj punktoj per tiu kiu duoble ĉirkaŭas la singulajn punktojn. Tamen trakti diversajn problemojn per holpo de la duoble fermita integrovojo ne estas facile. Se la integralo konverĝas, la uzado de la integrovojo finiĝanta ĉe singulaj punktoj permesas pli facile antaŭvidi la rezultatojn. Estas do nature sin demandi ĉu oni povas trakti diverĝan integralon kiel konverĝan. La ideo de J. Hadamard permesas respondi jese. Tion ni jam rimarkis en nia libro [3]. Tamen la uzado de la integralo de Riemann-Liouville estas pli oportuna ankaŭ por nia celo.

Ni jam traktis en [4] la finitan parton de diverĝa integralo en la kompleksa kampo. En la nuna artikolo, ni traktos la integralon de Riemann-Liouville, kompletigante ĉe kelkaj punktoj la antaŭajn rezultatojn. Al la aplikado ni dediĉos la sekvontan artikolon.

I. Finita parto de funkcio

1. Potenca punkto. Se oni havas la ekspansion

$$f(x)=(x-a)^{\rho}\{a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots\} \qquad (a_0\neq 0) \tag{1.1}$$

ĉirkaŭ a, a estas nomata *simpla potenca punkto* kun la *potenca indico* ρ. Se $f(x)$ estas la sumo de finita nombro da funkcioj kiuj havas ĉe a simplajn potencajn punktojn, a estas nomata *potenca punkto* de $f(x)$. Simpla potenca punkto kun la potenca indico egala al negativa entjero estas *poluso*; tiu kun

la potenca indico egala al pozitiva entjero estas *nulpunkto*. *Regula punkto* estas simpla potenca punkto kun la potenca indico egala al nenegativa entjero.

Se la potenca indico ρ ĉe la simpla potenca punkto a de la funkcio $f(x)$ difinita de (1.1) ne estas nepozitiva entjero, la *finita parto* de $f(x)$ ĉe a estas 0 laŭ difino. Se $\rho=-n$ estas nepozitiva entjero, la *finita parto* de $f(x)$ ĉe a estas a_n laŭ difino. En tiu kazo, oni havas

$$a_n=\int_{|x-a|=r}\frac{f(x)}{x-a}dx \tag{1.2}$$

se r estas pli malgranda ol la konverĝradio de la ekspansio (1.1).

Se a estas simpla potenca punkto de $f(x)$, ni signas per $\lceil f(x)\rfloor^a$ ĝian finitan parton ĉe a. Se $f(x)$ estas la sumo de funkcioj $f_j(x)$ $(j=1,2,\cdots,n)$ kun simplaj potencaj punktoj ĉe a, la *finita parto* $\lceil f(x)\rfloor^a$ de $f(x)$ ĉe a estas difinata de

$$\lceil f(x)\rfloor^a=\lceil f_1(x)\rfloor^a+\lceil f_2(x)\rfloor^a+\cdots+\lceil f_n(x)\rfloor^a.$$

Estas klare ke oni havas la *linearecon*

$$\lceil \alpha f(x)+\beta g(x)\rfloor^a=\alpha\lceil f(x)\rfloor^a+\beta\lceil g(x)\rfloor^a, \tag{1.3}$$

kie α kaj β estas konstantoj.

Estas ankaŭ facile vidi la jenajn propoziciojn.

1.1 *La produto $f(x)$ de funkcioj $f_j(x)$ $(j=1,\cdots,n)$ kiuj havas ĉe a simplajn potencajn punktojn kun la potencaj indicoj ρ_j $(j=1,\cdots,n)$ havas ĉe a simplan potencan punkton kun la potanca indico ρ egala al la sumo $\sum\rho_j$.*

1.2 *Se $f(x)$ havas ĉe a simplan potencan punkton kun la potenca indico ρ, la inverso $1/f(x)$ havas ĉe a simplan potencan punkton kun la potenca indico $-\rho$.*

1.3 *Ĉiuj funkcioj kiuj havas ĉe a potencajn punktojn formas ringon.*

Komprenble la funkcio idente nula estas konsiderata kiel funkcio havanta ĉe a potencan punkton kun la potenca indico $+\infty$.

$c(x-a)^\rho$ $(c\neq 0)$ estas nomata *potenca monomo* de $x-a$ kun la potenca indico ρ.

2. Potenclogaritma punkto. Se $f(x)$ estas polinomo de $\log(x-a)$ kies koeficientoj estas funkcioj kiuj havas ĉe a potencajn punktojn, a estas nomata *potenclogaritma punkto* de $f(x)$. Ni havas do

$$f(x)=f_0(x)+f_1(x)\log(x-a)+\cdots+f_m(x)(\log(x-a))^m, \tag{2.1}$$

kie ĉiu $f_j(x)$ havas ĉe a potencan punkton. m estas nomata *logaritma grado* de $f(x)$ ĉe a. La *finita parto* de $f(x)$ ĉe a estas difinata de

$$\lceil f(x)\rfloor^a=\lceil f_0(x)\rfloor^a. \tag{2.2}$$

Oni vidas tuj la linearecon (1.3).

Se ĉiu $f_j(x)$ havas ĉe a simplan potencan punkton kun la potenca indico ρ_j kaj se $\rho_0,\cdots,\rho_m$ diferencas je entjeroj unu de la aliaj, ni diros ke $f(x)$ havas ĉe a *simplan potenclogaritman punkton* kun la potenca indico ρ egala

al tiu ρ_j kiu havas la plej malgrandan realan parton.

Estas facile vidi ke la propozicioj **1.1** kaj **1.3** estas ĝeneraligeblaj jene.

2.1 *La produto $f(x)$ de funkcioj $f_j(x)$ $(j=1, \cdots, m)$ kiuj havas ĉe a simplajn potenclogaritmajn punktojn kun la potencaj indicoj ρ_j kaj kun la logaritmaj gradoj m_j havas ĉe a simplan potenclogaritman punkton kun la potenca indico ρ egala al la sumo $\sum \rho_j$ kaj kun la logaritma grado m egala al la sumo $\sum m_j$.*

2.2 *Ĉiuj funkcioj kiuj havas ĉe a potenclogaritmajn punktojn formas ringon.*

Kompreneble potenca punkto estas konsiderata kiel potenclogaritma punkto kun la logaritma grado 0.

$c(x-a)^\rho(\log(x-a))^m$ $(c \neq 0)$ estas nomata *potenclogaritma monomo* kun la potenca indico ρ kaj la logaritma grado m.

3. Nereduktebla esprimo. Funkcio kiu havas ĉe a potenclogaritman punkton estas multvalora ĉirkaŭ a same kiel $\log(x-a)$. Por eviti konfuziĝon, ni konsideras ĝin funkcio de x kaj $\arg(x-a)$.

3.1 *$f(x)$ estu la sumo de funkcioj $f_j(x)$ $(j=1, \cdots, m)$ havantaj ĉe a simplajn potenclogaritmajn punktojn kun la potencaj indicoj ρ_j. Se la ρ_j diferencas unu de la aliaj, $f(x)$ ne povas esti idente nula.*

Ni signas per μ kaj ν la realan kaj imaginaran partojn de unu kompleksa nombro ρ kaj per r kaj θ la modulon kaj la argumenton de $x-a$. Tiam ni havas

$$|(x-a)^\rho| = r^\mu e^{-\nu\theta}.$$

Se do x proksimiĝas al a laŭ la kurbo $\theta=\alpha \log r$, la modulo $|(x-a)^\rho|$ egalas $r^{\mu-\alpha\nu}$. Ni signas per μ_j kaj ν_j la realan kaj imaginaran partojn de ρ_j. Se α ne prenas specialajn valorojn, unu el la nombroj $\mu_j-\alpha\nu_j$ estas pli malgranda ol la $n-1$ aliaj. Ekzemple, $\mu_1-\alpha\nu_1$ estu la plej malgranda. Kiam x proksimiĝas al a laŭ la kurbo $\theta=\alpha \log r$, $f_1(x)/x^{\rho_1}$ konverĝas al nenula konstanto aŭ grandiĝas senfine. Do $f(x)$ ne povas esti idente nula.

Se du funkcioj havas ĉe a simplajn potenclogaritmajn punktojn kun la potencaj indicoj kies diferenco estas entjera, ilia sumo havas ankaŭ ĉe a simplan potenclogaritman punkton. Se do $f(x)$ havas ĉe a potenclogaritman punkton, ĝi estas la sumo de funkcioj $f_j(x)$ $(j=1, \cdots, m)$ kiuj havas ĉe a simplajn potenclogaritmajn punktojn kun la potencaj indicoj ρ_j, neniu el kies diferencoj estas entjera. Tiam ni diros ke la esprimo

$$f(x) = f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_m(x)$$

estas *nereduktebla.*

3.2 *La nereduktebla esprimo estas unika,* t. e. *se $f(x)$ havas du nereduktebla esprimojn*

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_m(x) \\ &= g_1(x)+g_2(x)+\cdots+g_n(x) \end{aligned}$$

la du sistemoj $(f_1, \cdots, f_m)$ *kaj* $(g_1, \cdots, g_m)$ *koincidas kiel tuto.*

Efektive, ni havas

$$f_1(x)+\cdots+f_m(x)-g_1(x)-\cdots-g_n(x)=0\,.$$

Laŭ la propozicio 3.1, du el la $m+n$ funkcioj $f_j(x)$ $(j=1, \cdots, m)$, $g_k(x)$ $(k=1, \cdots, n)$ havas ĉe a saman potencan indicon. Supozu do ke $f_1(x)$ kaj $g_1(x)$ havas ĉe a saman potencan indicon ρ_1. La potencaj indicoj de la aliaj $f_j(x)$ kaj $g_k(x)$ diferencas de ρ_1 je neentjeraj valoroj. Sekve por ke oni havu

$$f_2(x)+\cdots+f_m(x)-g_2(x)-\cdots-g_n(x) = g_1(x)-f_1(x)\,,$$

la du flankoj devas nuliĝi. Tiam du el la $m+n-2$ funkcioj $f_j(x)$ $(j=2, \cdots, m)$, $g_k(x)$ $(k=2, \cdots, n)$ havas ĉe a saman potencan indicon. Ni povas supozi ke ili estas $f_2(x)$ kaj $g_2(x)$, ktp. Ni havas do la konkludon de la propozicio.

4. Finita parto de konverĝa vico de funkcioj.

4.1 *Supozu ke la vico de funkcioj* $f_n(x)$ *holomorfaj en ia ĉirkaŭaĵo* U *de* a *konverĝas uniforme al* $f(x)$ *kaj ke* $\varphi(x)$ *havas ĉe* a *potenclogaritman punkton. Tiam oni havas*

$$\ulcorner f(x)\varphi(x)\lrcorner^a = \lim_{n\to\infty} \ulcorner f_n(x)\varphi(x)^a\lrcorner \tag{4.1}$$

kaj

$$\ulcorner f^{(k)}(x)\varphi(x)\lrcorner^a = \lim_{n\to\infty} \ulcorner f_n^{(k)}(x)\varphi(x)\lrcorner^a\,. \tag{4.2}$$

Pro la lineareco de la finita parto, estas sufiĉe konsideri la kazon, en kiu oni havas la ekspansion

$$\varphi(x)=(x-a)^\rho(\log(x-a))^m\{a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots\}\,. \tag{4.3}$$

Se ρ ne estas nepozitiva entjero aŭ se ρ estas nepozitiva entjero kaj $m>0$, la du flankoj de (4.1) nuliĝas. Supozu do ke $\rho=-n$ estas nepozitiva entjero kaj m estas 0. Tiam oni havas

$$\begin{aligned}\ulcorner f(x)\varphi(x)\lrcorner^a &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|x-a|=r}\frac{f(x)\varphi(x)}{x-a}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{|x-a|=r}\frac{f_n(x)\varphi(x)}{x-a}dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\ulcorner f_n(x)\varphi(x)\lrcorner^a\,.\end{aligned}$$

Oni povas demonstracii sammaniere la rilaton (4.2).

5. Derivado rilata al parametro.

5.1 $\varphi(x)$ *estu funkcio havanta ĉe* 0 *potenclogaritman punkton,* $a(t)$ *funkcio holomorfa en ia domajno* Δ *kaj* $f(x, t)$ *funkcio holomorfa en* $D\times\Delta$, *kie* D *estas domajno enhavanta* $a(t)$ *por* $t\in\Delta$. *Tiam ni havas*

$$\frac{d}{dt}\ulcorner f(x, t)\varphi(x-a(t))\lrcorner^{x=a(t)} = \ulcorner\{f_t'(x, t)+a'(t)f_x'(x, t)\}\varphi(x-a(t))\lrcorner^{x=a(t)}\,. \tag{5.1}$$

Rezonante same kiel en la n-ro 4, ni povas supozi ke oni havas la ekspansion

$$\varphi(x) = x^{-n}\{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots\}\,, \tag{5.2}$$

en kiu n estas nenegativa entjero. Ni metas

$$\psi(x) = x^n\varphi(x), \quad g(x,t) = f(x,t)\psi(x-a(t))$$

kaj signas per $g^{(n)}(x,t)$ la n-an deriviton de $g(x,t)$ rilatan al x. Tiam ni havas

$$\lceil f(x,t)\varphi(x-a(t))\rfloor^{x=a(t)} = g^{(n)}(a(t),t)/n!$$

kaj sekve

$$\frac{d}{dt}\lceil f(x,t)\varphi(x-a(t))\rfloor^{x=a(t)} = \frac{a'(t)g^{(n+1)}(a(t),t)+g_1^{(n)}(a(t),t)}{n!}, \tag{5.3}$$

kie $g_1^{(n)}(x,t)$ signas la $(n+1)$-an deriviton $\dfrac{\partial^{n+1}}{\partial x^n\,\partial t}g(x,t)$. Aliparte, ni havas

$$f'_t(x,t)\varphi(x-a(t)) = [g'_t(x,t)+a'(t)f(x,t)\psi'(x-a(t))](x-a(t))^{-n},$$
$$f'_x(x,t)\varphi(x-a(t)) = [g'_x(x,t)-f(x,t)\psi'(x-a(t))](x-a(t))^{-n},$$

de kiuj ni facile vidas ke la dekstra flanko de (5.1) egalas (5.3). Oni havas do la rilaton (5.1).

6. Punkto infinitumo. Se 0 estas potenca (potenclogaritma) punkto de $f(1/x)$, ni diros ke la infinitumo ∞ estas *potenca* (*potenclogaritma*) *punkto* de $f(x)$. La *finita parto* de $f(x)$ ĉe ∞ estas laŭ difino

$$\lceil f(x)\rfloor^{\infty} = \lceil f(1/x)\rfloor^{x=0}.$$

6.1 *$f(x)$ estu funkcio havanta ĉe a potenclogaritman punkton. Tiam ni havas*

$$\lceil f(x)\rfloor^{a} = \lceil f(t-b+a)\rfloor^{t=b}. \tag{6.1}$$

Se a aŭ b estas ∞, tiu rilato devas esti anstataŭata de

$$\lceil f(x)\rfloor^{\infty} = \left\lceil f\left(\frac{1}{t-b}\right)\right\rfloor^{t=b}. \tag{6.1$'$}$$

$$\lceil f(x)\rfloor^{a} = \lceil f(a+1/t)\rfloor^{t=\infty}. \tag{6.1$''$}$$

Estas sufiĉe konsideri la kazon en kiu $f(x)$ havas ĉe a simplan potenclogaritman punkton, aŭ pli simple la kazon en kiu oni havas la ekspansion

$$f(x)=(x-a)^{\rho}(\log(x-a))^m\{a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots\}.$$

Se b estas ankaŭ finita, oni havas la ekspansion de

$$g(t) = f(t-b+a)$$

anstataŭigante $x-a$ per $t-b$. Se $a=\infty$, estas sufiĉe anstataŭigi $x-a$ per $1/x$. Se $b=\infty$, estas sufiĉe anstataŭigi $t-b$ per $1/t$.

Ĉiuj propozicioj establitaj ĝis n-ro 4 rilate al punkto en finita distanco estas facile ĝeneraligeblaj al la punkto ∞. Koncerne la propozicion 5.1, ĝi estas vera por $a=\infty$ se a ne dependas de la parametro.

7. Funkcio de Fuchsa tipo. Ni diros ke $f(x)$ estas *funkcio de Fuchsa tipo* en ia domajno D, se la jena kondiĉo estas plenumata.

Per la analitika plilongigo laŭ ia ajn kurbo en D oni renkontas neniun punkton de $f(x)$ alian ol la potenclogaritma punkto.

Ekzemple, konsideru la linearan ekvacion

(7.1) $$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y=0$$

kies koeficientoj estas meromorfaj en D. Se

(7.2) $$(x-a)^k p_k(x) = P_k(x) \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

estas holomorfaj ĉirkaŭ $a\in D$, (7.1) havas n lineare nedependajn solvojn por kiuj a estas simpla potenclogaritma punkto. Iliaj potencaj indicoj ĉe a estas la n radikoj de la tiel nomata *determina ekvacio* kiu skribiĝas

(7.3) $$\rho(\rho-1)\cdots(\rho-n+1)+P_1(0)\rho(\rho-1)\cdots(\rho-n+2)+\cdots+P_n(0)=0.$$

Oni scias plie ke oni havas la reciprokan propozicion. Ni havas do la teoremon

7.1 *La koeficientoj de la ekvacio* (7.1) *estu meromorfaj ĉirkaŭ a. Por ke ĝi havu n lineare nedependajn solvojn potenclogaritmajn ĉe a, estas necese kaj sufiĉe ke la funkcioj* $P_k(x)$ *difinitaj de* (7.2) *estas holomorfaj ĉe a.*

Kiam la kondiĉo de la teoremo estas plenumata, ni diros ke a estas *potencorda singula punkto* de la ekvacio (7.1).

a povas esti ∞. Tiam (7.2) kaj (7.3) devas esti anstataŭataj de

(7.2)′ $$x^k p_k(x) = P_k(x) \qquad (k=1,2,\cdots,n),$$

(7.3)′ $$\rho(\rho+1)\cdots(\rho+n-1)-P_1(\infty)\rho(\rho+1)\cdots(\rho+n-2)+\cdots+(-1)^n P_n(\infty)=0.$$

Ni diros ke la ekvacio (7.1) estas de Fuchsa tipo en D se la jena kondiĉo estas plenumata:

La koeficientoj $p_j(x)$ estas meromorfaj en D kaj ĉiuj polusoj de la koeficientoj estas potencordaj singulaj punktoj.

II. Finita parto de deverĝa integralo

8. **Difino.** C estu ia kurbo liganta a kaj b kaj $\varphi(x)$ funkcio holomorfa sur C krom a ĉe kiu ĝi havas potenclogaritman punkton. Ni signas per $F(\lambda)$ la analitikan funkcion kiu koincidas kun

(8.1) $$F(\lambda) = \int_C (x-a)^\lambda \varphi(x)\,dx$$

kiam la reala parto $\Re\lambda$ de λ estas pozitiva kaj sufiĉe granda. La finita parto de $F(\lambda)$ ĉe $\lambda=0$ estas laŭ difino la *finita parto* de la integralo de $\varphi(x)$ laŭ C kaj ni skribas

$$\ulcorner F(\lambda)\lrcorner^0 = \left\lceil \int_C \varphi(x)dx = \left\lceil \int_a^b \varphi(x)\,dx\,.\right.\right.$$

Kompreneble kiam la integralo konverĝas, la finita parto koincidas kun la integralo mem. Estas ankaŭ facile vidi ke oni havas

$$\ulcorner F(\lambda)\lrcorner^\lambda = \left\lceil \int_C (x-a)^\lambda \varphi(x)\,dx\right.$$

kian ajn valoron prenas λ.

$\psi(x)$ estu funkcio kiu havas ĉe a potenclogaritman punkton. Ni signas

per $G(\lambda)$ la analitikan fnukcion kiu koincidas kun

$$G(\lambda)=\int_C (x-a)^\lambda \psi(x)\,dx \tag{8.2}$$

kiam la reala parto $\Re\lambda$ de λ estas pozitiva kaj sufiĉe granda. Ni havas tiam

$$\alpha F(\lambda)+\beta G(\lambda)=\int_C (x-a)^\lambda(\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x))\,dx\,,$$

supozante $\Re\lambda$ pozitiva kaj sufiĉe granda. Ni havas do

$$\begin{aligned}\left\lceil\int_C(\alpha\varphi(x)+\alpha\psi(x))\,dx &= \lceil\alpha F(\lambda)+\beta G(\lambda)\rfloor^0\\ &= \alpha\lceil F(\lambda)\rfloor^0+\beta\lceil G(\lambda)\rfloor^0\\ &= \alpha\left\lceil\int_C\varphi(x)dx+\beta\right\lceil\int_C\psi(x)\,dx\,,\end{aligned}$$

t. e. la linearecon de la finita parto de integralo:

$$\left\lceil\int_C(\alpha\varphi+\beta\psi)(x)\,dx=\alpha\left\lceil\int_C\varphi(x)dx+\beta\right\lceil\int_C\psi(x)\,dx\,. \tag{8.3}$$

Ni povas facile kalkuli la finitan parton de la integralo de potenclogaritma monomo.

Efektive ni havas

$$\int_a^b (x-a)^{\lambda-1}\,dx=\frac{(b-a)^\lambda}{\lambda} \tag{8.4}$$

por $\Re\lambda>0$ kaj la dekstra flanko estas meromorfa funkcio. Ni havas do

$$\left\lceil\int_a^b (x-a)^{\lambda-1}\,dx=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^\lambda}{\lambda} & \text{por } \lambda\neq 0\,,\\ \log(b-a) & \text{por } \lambda=0\,.\end{cases} \tag{8.5}$$

Derivante la rilaton (8.4), ni ricevas

$$\int_a^b (x-a)^{\lambda-1}(\log(x-a))^m\,dx=\frac{d^m}{d\lambda^m}\frac{(b-a)^\lambda}{\lambda}.$$

Ni havas do

$$\left\lceil\int_a^b (x-a)^{\lambda-1}(\log(x-a))^m\,dx=\begin{cases}\dfrac{d^m}{d\lambda^m}\dfrac{(b-a)^\lambda}{\lambda} & \text{por } \lambda\neq 0\,,\\ \dfrac{(\log(b-a))^{m+1}}{m+1} & \text{por } \lambda=0\,.\end{cases} \tag{8.6}$$

Tiuj rezultatoj kondukas kun la lineareco de la finita parto ke la supre difinita funkcio $F(\lambda)$ estas meromorfa en la tuta ebeno. Ĉar, subtrahante de $\varphi(x)$ finitan nombron da potenclogaritmaj monomoj de $x-a$ ni ricevas funkcion kies integralo etendita laŭlonge de C konverĝas. Se a estas simpla potenca punkto kun la potenca indico ρ, $F(\lambda)$ estas holomorfa krom la punktoj $-\rho-n$ $(n=1,2,\cdots)$ kiuj estas unuaordaj polusoj. Se a estas simpla potenclogaritma punkto kun la potenca indico ρ kaj la logaritma grado $m-1$, $F(\lambda)$ estas holomorfa krom la punktoj $-\rho-n$ $(n=1,2,\cdots)$ kiuj estas maksi-

mume m-aordaj polusoj.

9. Elementaj ecoj de la finita parto. La elementajn ecojn de la integralo havas ankaŭ la finita parto de la integralo. Ni tion montros en tiu n-ro.

Supozu ke $\varphi(x)$ estas holomorfa sur ia kurbo C krom ĝiaj ekstremoj a kaj b ĉe kiuj $\varphi(x)$ havas potenclogaritmajn punktojn. Ni prenas sur C unu punkton c kaj ni difinas la finitan parton de la integralo etendita laŭlonge de C per

$$\text{(9.1)} \qquad \left\lceil\int_a^b \varphi(x)dx = \left\lceil\int_a^c \varphi(x)dx - \left\lceil\int_b^c \varphi(x)\,dx\,.\right.\right.$$

Konsideru unue la kazon en kiu b estas regula punkto de $\varphi(x)$. Ni signas per $G_1(\lambda)$ kaj $G_2(\lambda)$ la analitikajn funkciojn kiuj koincidas kun la unua kaj la dua integraloj en la dekstra flanko de (9.1) kiam $\Re\lambda>0$ estas sufiĉe granda. Ni havas

$$F(\lambda) = G_1(\lambda) - G_2(\lambda)$$

kaj $G_2(\lambda)$ estas holomorfa ĉe $\lambda=0$. Ni havas do

$$\lceil F(\lambda)\rfloor^0 = \lceil G_1(\lambda)\rfloor^0 - G_2(0)\,,$$

kio signifas ke oni havas (9.1).

c' estu ajna punkto de C kaj supozu ekzemple ke ĝi troviĝas inter a kaj c. Laŭ la ĵus demonstraciita fakto, ni havas

$$\left\lceil\int_a^c \varphi(x)dx = \left\lceil\int_a^{c'} \varphi(x)\,dx - \int_c^{c'} \varphi(x)\,dx\,,\right.\right.$$

$$\left\lceil\int_b^{c'} \varphi(x)dx = \left\lceil\int_b^c \varphi(x)dx - \int_{c'}^c \varphi(x)\,dx\,.\right.\right.$$

Se ni adicias tiujn rilatojn, la duaj termoj en la dekstraj flankoj sin nuligas kaj ni havas

$$\left\lceil\int_a^c \varphi(x)dx - \left\lceil\int_b^c \varphi(x)dx = \left\lceil\int_a^{c'} \varphi(x)\,dx - \left\lceil\int_b^{c'} \varphi(x)\,dx\,,\right.\right.\right.$$

kio montras ke nia difino (9.1) ne dependas de la elekto de la punkto c.

La formulo (9.1) skribiĝas sub la pli familiara formo:

$$\text{(9.1)}' \qquad \left\lceil\int_a^b \varphi(x)dx = \left\lceil\int_a^c \varphi(x)dx + \left\lceil\int_c^b \varphi(x)\,dx\,.\right.\right.$$

Se ni anstataŭigas ĉi tie b per x kaj supozas la holomorfecon de φ sur la arko $\widehat{cx}$, ni havas

$$\left\lceil\int_a^x \varphi(t)\,dt = \left\lceil\int_a^c \varphi(t)\,dt + \int_c^x \varphi(t)\,dt\,.\right.\right.$$

Derivante tiun ĉi rilaton, ricevas

$$\text{(9.2)} \qquad \frac{d}{dx}\left\lceil\int_a^x \varphi(t)\,dt = \varphi(x)\,,\right.$$

t. e. $\left\lceil \int_a^x \varphi(t)\,dt \right.$ *estas primitiva funkcio de* φ.

Ni jam rimarkis la linearecon (8.3) kiam $\varphi(x)$ kaj $\psi(x)$ estas holomorfaj sur C escepte unu ekstremon a. La rilato (9.1)′ sekvigas tuj ke tiu lineareco estas valida kiam $\varphi(x)$ kaj $\psi(x)$ estas holomorfaj sur C escepte la du ekstremojn.

Supozu pli ĝenerale ke sur la kurbo C troviĝas finite da potenclogaritmaj punktoj $a_1, a_2, \cdots, a_n$ de la funkcio $\varphi(x)$. Ni povas difini la finitan parton de la integralo de $\varphi(x)$ etendita laŭlonge de C per la matematika indukto rilata al n, utiligante la rilaton (9.1)′.

Efektive, supozu ke la finita parto de integralo estas difinita kiam la nombro de potenclogaritmaj punktoj sur la integrovojo estas pli malmulta ol n, kaj ke ni havas la formulon (9.1)′ en tiu kazo. Se sur C troviĝas n potenclogaritmaj punktoj ($n>1$), ni difinas la finitan parton de la integralo etendita laŭlonge de C per (9.1)′, prenante la punkton c tiamaniere ke sur ĉiu el du arkoj $\widehat{ac}$ kaj $\widehat{cb}$ troviĝas maksimume $n-1$ potenclogaritmaj punktoj de $\varphi(x)$. Ni povas facile vidi ke la lineareco (8.3) kaj la formulo (9.1)′ restas ankoraŭ validaj kiam sur C troviĝas n potenclogaritmaj punktoj.

10. Integralteoremo de Cauchy. Se $\varphi(x)$ havas ĉe a potenclogaritman punkton, ĝia derivito $\varphi'(x)$ ankaŭ havas ĉe a potenclogaritman punkton. Ni povas do konsideri la finitan parton de la integralo de la derivito $\varphi'(x)$. Ni volas montri ke ĝeneraligante la bone konatan formulon

$$\int_C \varphi'(x)\,dx = [\varphi(x)]_C$$

ni ricevas

$$\left\lceil \int_C \varphi'(x)\,dx = \lceil \varphi(x) \rfloor_C \;; \tag{10.1}$$

la dekstra flanko reprezentas

$$\lceil \varphi(x) \rfloor_a^b = \lceil \varphi(x) \rfloor^b - \lceil \varphi(x) \rfloor^a ,$$

kie a kaj b estas la ekstremoj de C.

Ni konsideras unue la kazon de

$$\varphi(x) = (x-a)^\rho (\log(x-a))^m. \tag{10.2}$$

Dank'al la formulo (8.6) ni ricevas por $\rho \neq 0$

$$\begin{aligned}\left\lceil \int_a^b \varphi'(x)\,dx &= \left\lceil \int_a^b (x-a)^{\rho-1}[\rho(\log(x-a))^m + m(\log(x-a))^{m-1}]\,dx \right. \\ &= \rho \frac{d^m}{d\rho^m}\frac{(b-a)^\rho}{\rho} + m\frac{d^{m-1}}{d\rho^{m-1}}\frac{(b-a)^\rho}{\rho} \\ &= (b-a)^\rho(\log(b-a))^m = \varphi(b)\,.\end{aligned}$$

Ĉar $\lceil \varphi(x) \rfloor^a = 0$, ni ricevas (10.1). Se $\rho = 0$ kaj $m>0$, ni havas

$$\left\lceil \int_a^b \varphi'(x)\,dx = m \left\lceil \int_a^b (x-a)^{-1}(\log(x-a))^{m-1}\,dx \right.$$
$$= (\log(b-a))^m = \varphi(b)\,.$$

Ni havas do (10.1), ĉar $\lceil\varphi(x)\rfloor^a=0$. Se $\lambda=m=0$, la formulo estas evidenta.

La formulo (10.1) estas do vera se $\varphi(x)$ estas potenclogaritma monomo. Ĝi estas do vera se $\varphi(x)$ estas lineara kombinaĵo de potenclogaritmaj monomoj. Subtrahante de $\varphi(x)$ linearan kombinaĵon de potenclogaritmaj monomoj, ni ricevas funkcion kiu konverĝas al 0 por $x\to a$. Ankaŭ por tiu ĉi la formulo estas vera. La formulo (10.1) estas do establita en la kazo en kiu $\varphi(x)$ estas holomorfa sur C escepte unu el la ekstremoj.

Supozu nun ke $\varphi(x)$ estas holomorfa sur C krom la ekstremoj ĉe kiuj $\varphi(x)$ havas potenclogaritmajn punktojn. Se c troviĝas sur C, la ĵus demonstraciita rezultato montras ke oni havas

$$\left\lceil \int_a^c \varphi'(x)\,dx = \lceil\varphi(x)\rfloor_a^c\,, \qquad \left\lceil \int_c^b \varphi'(x)\,dx = \lceil\varphi(x)\rfloor_c^b\,.$$

Adiciante tiujn egalaĵojn, ni ricevas la rilaton (10.1).

La finita parto ĉe a de la funkcio

$$\Phi(x) = \left\lceil \int_a^x \varphi(t)\,dt \right.$$

estas 0, ĉar

$$\Phi(x) = \left\lceil \int_a^x \Phi'(t)\,dt = \lceil\Phi(t)\rfloor_a^x = \Phi(x) - \lceil\Phi(t)\rfloor^a.$$

La formulo (10.1) restas valida eĉ kiam sur C troviĝas finita nombro da potenclogaritmaj punktoj. Oni povas demonstracii tion per matematika indukto rilata al la nombro de potenclogaritmaj punktoj troviĝantaj sur la integrovojo.

Speciale supozu ke C estas fermita kurbo tiel ke $a=b$. Kvankam $\varphi(x)$ ne estas uniforma, povas okazi ke $\varphi(x)$ havas ĉe b la saman ekspansion kiel ĉe a. Tiam ni havas $\lceil\varphi(x)\rfloor_a^b=0$, kaj sekve

$$\left\lceil \int_C \varphi'(x)\,dx = 0\,. \tag{10.3}$$

Tiu rimarko tuj kondukas nin al la ĝeneraligo de la integralteoremo de Cauchy.

10.1 *$f(x)$ estu funkcio holomorfa en ia domajno D ĉirkaŭita de fermita kurbo C. Se ĝi estas holomorfa ankaŭ sur C escepte finitan nombron da punktoj $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ĉe kiuj ĝi havas potenclogaritmajn punktojn, oni havas*

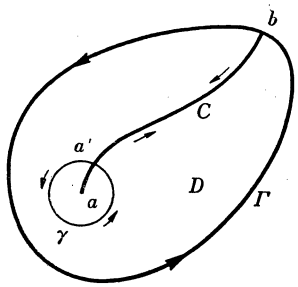
$$\left\lceil \int_C f(x)\,dx = 0\,. \tag{10.4}$$

Efektive,

$$\varphi(x)=\int f(x)\,dx$$

estas holomorfa en D same kiel sur C escepte la punktojn $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ĉe kiuj $\varphi(x)$ ankaŭ havas potenclogaritmajn punktojn. Oni havas do (10.3), kio estas ekvivalenta kun (10.4).

11. Integralo etendita laŭlonge de laĉo. Γ estu fermita kurbo kiu ĉirkaŭas unu domajnon D. $f(x)$ estu funkcio holomorfa sur Γ same kiel en D. La integralo de $(x-a)^\rho f(x)$ etendita laŭlonge de Γ egalas tiun etenditan laŭlonge de unu vojo L kiun ni difinos jene.



γ estu malgranda cirklo ĉirkaŭ a. Aliparte, C estu kurbo alliganta a al b. Tiu kurbo renkontas γ ĉe ia punkto a'. Kiel la figuro montras, la dufoje trapasita arko de C alliganta a' al b kaj la unufoje trapasita cirklo γ formas la vojon L. Ĝi estas nomata *laĉo* ĉirkaŭ a.

La valoro kiun prenas $\arg(x-a)$ kiam x iras de b al a' estas 2π pli malgranda ol tiu kiun prenas $\arg(x-a)$ kiam x iras de a' al b. Ni havas do

$$\int_\Gamma (x-a)^\rho f(x)\,dx=\int_L (x-a)^\rho f(x)\,dx$$
$$=(1-e^{-2\pi i\rho})\int_{a'}^{b}(x-a)^\rho f(x)\,dx+\int_\gamma (x-a)^\rho f(x)\,dx\,.$$

Se $\Re\rho>-1$, la integralo etendita laŭlonge de γ nuliĝas kun la radio de γ. Ni havas do

$$\int_a^b (x-a)^\rho f(x)\,dx=\frac{1}{1-e^{-2\pi i\rho}}\int_\Gamma (x-a)^\rho f(x)\,dx\,.$$

La dekstra flanko estas meromorfa funkcio de ρ kies polusoj estas la negativaj entjeroj. La denominatoro de la koeficiento nuliĝas por $\rho=0,1,2,\cdots$, sed la integralo de $(x-a)^\rho f(x)$ ankaŭ nuliĝas kaj la nenegativaj entjeroj estas regulaj punktoj de la dekstra flanko. Ni havas do

$$\left[\int_a^b (x-a)^\rho f(x)\,dx=\frac{1}{1-e^{-2\pi i\rho}}\int_\Gamma (x-a)^\rho f(x)\,dx\right. \tag{11.1}$$

kiam ρ ne egalas negativan entjeron. Kompreneble, en tiu ĉi rilato, Γ povas esti anstataŭata de la laĉo L.

12. Derivado rilata al parametro. Unue ni rimarkas ke se $f(x)$ estas holomorfa sur la kurbo kun la komenca punkto a, ni havas

$$\frac{d^m}{d\rho^m}\left[\int_C (x-a)^\rho f(x)\,dx=\left[\int_C (x-a)^\rho(\log(x-a))^m f(x)\,dx\right.\right. \tag{12.1}$$

por ρ diferenca de negativa entjero.

Efektive tiu rilato estas vera por $\Re\rho > -1$, dum du flankoj estas holomorfaj escepte la negativentjerajn valorojn de ρ.

$f(x, t)$ estu funkcio holomorfa por $(x, t) \in D \times \Delta$, kie D kaj Δ estas domajnoj. Ni signas per L laĉon ĉirkaŭ a kun la komenca punkto b, tiel ke ni havas

$$(1-e^{-2\pi i\rho})\left[\int_C (x-a)^\rho f(x, t)\,dx = \int_L (x-a)^\rho f(x, t)\,dx\,.\right.$$

Derivante tiun rilaton per t, ni ricevas

$$(1-e^{-2\pi i\rho})\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_C (x-a)^\rho f(x, t)\,dx = \int_L (x-a)^\rho \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)\,dx\right.$$
$$= (1-e^{-2\pi i\rho})\left[\int_C (x-a)^\rho \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)\,dx\,.\right.$$

Ni havas do

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_C (x-a)^\rho f(x, t)\,dx = \left[\int_C (x-a)^\rho \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)\,dx\right.\right. \tag{12.2}$$

por ρ diferenca de negativa entjero.

Se ni signas per $F_1(\rho, t)$, $F_2(\rho, t)$ la analitikajn funkciojn kiuj koincidas kun

$$\left[\int_C (x-a)^\rho f(x, t)\,dx\,, \quad \left[\int_C (x-a)^\rho \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)\,dx\right.\right.$$

por ρ diferenca de negativaj entjeroj, ni havas

$$\frac{\partial}{\partial t} F_1(\rho, t) = F_2(\rho, t)$$

laŭ (12.2). Do, signante per $-n$ negativan entjeron, ni havas

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_C (x-a)^{-n} f(x, t)\,dx &= \frac{\partial}{\partial t}\left[F_1(\rho, t)\right]^{\rho=-n} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t} F_1(\rho, t)\right]^{\rho=-n} \\ &= \left[F_2(\rho, t)\right]^{\rho=-n} \\ &= \left[\int_C (x-a)^{-n} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)\,dx\,.\right.\end{aligned}$$

Tiel ni vidas ke la formulo (12.2) restas valida por negativa entjero ρ.

Rimarkante

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_C (x-a)^\rho (\log(x-a))^m f(x, t)\,dx &= \frac{\partial^{m+1}}{\partial t\,\partial\rho^m}\left[\int_a^b (x-a)^\rho f(x, t)\,dx\right. \\ &= \frac{\partial^m}{\partial\rho^m}\left[\int_a^b (x-a)^\rho \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)\,dx\,,\right.\end{aligned}$$

ni ricevas pli ĝeneralan formulom

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_C (x-a)^\rho (\log(x-a))^m f(x, t)\,dx\right. \\ = \left[\int_C (x-a)^\rho (\log(x-a))^m \frac{\partial}{\partial t} f(x, t)\,dx\right.\end{aligned} \tag{12.3}$$

por ρ diferenca de negativa entjero. Rezonante same kiel supre, ni vidas ke tiu formulo restas valida por negativa entjero ρ.

Ni povas ĝeneraligi la formulon jene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_C (b-x)^\lambda (x-a)^\rho (\log(x-a))^m f(x,t)\,dx\right. \tag{12.4}$$
$$=\left[\int_C (b-x)^\lambda (x-a)^\rho (\log(x-a))^m \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx\right. .$$

Ĉar ni havas

$$\left[\int_C = \left[\int_a^c + \left[\int_c^b\right.\right.\right.$$

kaj $(b-x)^\lambda f(x,t)$ estas holomorfa sur la arko $\widehat{ac}$ de C kaj $(x-a)^\rho(\log(x-a))^m \cdot \times f(x,t)$ estas holomorfa sur la arko $\widehat{cb}$ de C.

Nun ni fiksas la valoron t kaj anstataŭigas $f(x,t)$ per $f(x)$. Ĉar $(b-x)^\lambda f(x)$ estas funkcio holomorfa de x, λ por $x \in \widehat{ac}$, ni havas

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial\lambda^p \partial\rho^q}\left[\int_a^c (b-x)^\lambda (x-a)^\rho f(x)\,dx\right.$$
$$=\left[\int_a^c (b-x)^\lambda (x-a)^\rho (\log(b-x))^p (\log(x-a))^q f(x)\,dx\right. ,$$

supozante ke λ kaj ρ diferencas de negativaj entjeroj. Ni havas la similan formulon por la finita parto de la integralo etendita laŭlonge de la arko. $\widehat{cb}$. Adiciante tiujn du rilatojn, ni havas

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial\lambda^p \partial\rho^q}\left[\int_a^b (b-x)^\lambda (x-a)^\rho f(x)\,dx\right. \tag{12.5}$$
$$=\left[\int_a^b (b-x)^\lambda (x-a)^\rho (\log(x-a))^p (\log(x-x))^q f(x)\,dx\right. .$$

Tiu formulo estas valida por λ kaj ρ diferencaj de negativaj entjeroj.

13. Vico de finitaj partoj.

13.1 *Supozu ke la vico de funkcioj $f_k(x)$ holomorfaj en la domajno D kaj ke la vicoj de nombroj a_k, b_k kaj ρ_k konverĝas respektive al a, b kaj ρ. Tiam ni havas*

$$\left[\int_{a_k}^{b_k} (x-a_k)^{\rho_k} f_k(x)\,dx \to \left[\int_a^b (x-a)^\rho f(x)\,dx\right.\right. \tag{13.1}$$

por $a \in D$, $b \in D$, $a \neq b$ kaj ρ diferenca de negativaj intjeroj aŭ por $a \in D$, $b \in D$, $a \neq b$ kaj $\rho_k = \rho = -n$ (negativa entjero).

Ni prenas laĉon L ĉirkaŭ a kun la komenca punkto b tiel ke oni havu

$$\int_L (x-a)^\rho f(x)\,dx = (1-e^{-2\pi i\rho})\left[\int_a^b (x-a)^\rho f(x)\,dx\right. .$$

Alligante b al b_k per rekta segmento, oni ricevas laĉon L_k kaj ni havas

$$\int_{L_k} (x-a_k)^{\rho_k} f_k(x)\,dx = (1-e^{-2\pi i\rho_k})\left[\int_{a_k}^{b_k} (x-a_k)^{\rho_k} f_k(x)\,dx\right.$$

por sufiĉe granda n. Estas klare ke oni havas

$$\int_{L_k}(x-a_k)^{\rho_k}f_k(x)\,dx \to \int_L (x-a)^{\rho}f(x)\,dx\,.$$

Oni havas do la rilaton (13.1) se ρ ne estas entjera. En la kazo de nenegativa entjero ρ, la rilato estas evidenta.

$$F_k(\rho)=\left\lceil\int_{a_k}^{b_k}(x-a_k)^{\rho}f(x)\,dx\,,\qquad F(\rho)=\left\lceil\int_a^b(x-a)^{\rho}f(x)\,dx\right.\right.$$

estas holomorfaj en la sufiĉe malgranda domajno $0<|\rho+n|<\delta$ kaj $F_k(\rho)$ konverĝas al $F(\rho)$ por $k\to\infty$ uniforme en tiu domajno. $\lceil F_k(\rho)\rfloor^{-n}$ konverĝas do al $\lceil F(\rho)\rfloor^{-n}$. Ni havas do la konverĝon (13.1) por $\rho_k=\rho=-n$.

La propozicio montras ke la konverĝo

$$\left\lceil\int_a^b(x-a)^{\rho}f_k(x)\,dx \to \left\lceil\int_a^b(x-a)^{\rho}f(x)\,dx\right.\right.$$

estas uniforma por $a\in D$, $b\in D$, $a\neq b$ kaj ρ diferenca de negativaj entjeroj. Ni havas do la uniforman konverĝon

$$\frac{\partial^m}{\partial\rho^m}\left\lceil\int_a^b(x-a)^{\rho}f_k(x)\,dx \to \frac{\partial^m}{\partial\rho^m}\left\lceil\int_a^b(x-a)^{\rho}f(x)\,dx\right.\right.$$

sub la sama hipotezo. Rimarkante la formulon (12.1), ni ricevas la uniforman konverĝon

$$\left\lceil\int_a^b(x-a)^{\rho}(\log(x-a))^m f_k(x)\,dx \to \left\lceil\int_a^b(x-a)^{\rho}(\log(x-a))^m f(x)\,dx\,.\right.\right. \tag{13.2}$$

La rezonado kiun ni faris supre montras ke tiu uniforma konverĝo estas ankaŭ valida por negativa entjero ρ. Ni havas do la propozicion

13.2 *Supozu ke la vico de funkcioj $f_k(x)$ holomorfaj en ia domajno D konverĝas uniforme al $f(x)$. Tiam ni havas* (13.2) *uniforme por $a\in D$, $b\in D$, $a\neq b$ kaj ρ diferenca de negativaj entjeroj aŭ por $a\in D$, $b\in D$, $a\neq b$ kaj negativa entjero ρ.*

$f(x)$ estu funkcio holomorfa ĉirkaŭ a. Tiam ni havas la ekspansion

$$f(x) = c_0+c_1(x-a)+\cdots+c_n(x-a)^n+\cdots \tag{13.3}$$

kaj la partaj sumoj

$$f_n(x) = c_0+c_1(x-a)+\cdots+c_n(x-a)^n \tag{13.4}$$

konverĝas uniforme al $f(x)$ ĉirkaŭ a. Se do $\varphi(x)$ estas la potenclogaritma monomo (10.2), ni havas la uniforman konverĝon ĉirkaŭ a:

$$\left\lceil\int_a^x\varphi(t)f_n(t)\,dt \to \left\lceil\int_a^x\varphi(t)f(t)\,dt\,.\right.\right.$$

Tio estas ekvivalenta kun la uniforma konverĝo de la ekspansio

$$\left\lceil\int_a^x\varphi(t)f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}c_n\left\lceil\int_a^x\varphi(t)(t-a)^n dt\,.\right.\right.$$

Dank'al la formulo (8.5), ni havas

$$\left[\int_a^x \varphi(t)(t-a)^n dt = \begin{cases} \dfrac{\partial^m}{\partial \rho^m} \dfrac{(x-a)^{\rho+n+1}}{\rho+n+1} & \text{por } \rho+n+1 \neq 0\,, \\ \dfrac{(\log(x-a))^{m+1}}{m+1} & \text{por } \rho+n+1=0\,. \end{cases}\right.$$

La dekstra flanko estas polinomo de $\log(x-a)$ kies koeficiento estas potenca monomo kun la indico $\rho+n+1$ kaj ĝia finita parto ĉe a estas nulo. Se ni derivas ĝin, ni ricevas $\varphi(x)(x-a)^n$. Dank'al la lineareco de la finita parto de integralo, ni havas la propozicion

13.3 *Se $\varphi(x)$ estas funkcio kiu havas ĉe a potenclogaritman punkton kun la potenca indico ρ,*

$$\Phi(x) = \left[\int_a^x \varphi(t)\, dt\right.$$

havas ĉe a potenclogaritman punkton kun la potenca indico $\rho+1$ kaj ni havas

$$\Phi'(x) = \varphi(x)\,, \quad \left[\Phi(x)\right]^a = 0\,.$$

14. Ekzemploj. 1° Ni jam scias ke oni havas

$$\left[\int_a^b (x-a)^{\lambda-1}(\log(x-a))^m dx = \begin{cases} \dfrac{d^m}{d\lambda^m} \dfrac{(b-a)^\lambda}{\lambda} & \text{por } \lambda \neq 0\,, \\ \dfrac{(\log(b-a))^{m+1}}{m+1} & \text{por } \lambda = 0\,. \end{cases}\right. \tag{14.1}$$

2° $F(\lambda, \mu)$ estu la analitika funkcio de λ, μ kiu koincidas kun la integralo

$$\int_a^b (b-x)^{\lambda-1}(x-a)^{\mu-1} dx$$

por $\Re\lambda > 0$, $\Re\mu > 0$. Ni havas

$$F(\lambda, \mu) = (b-a)^{\lambda+\mu-1} \int_0^1 u^{\mu-1}(1-u)^{\lambda-1} du = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}(b-a)^{\lambda+\mu-1}$$

por $\Re\lambda > 0$, $\Re\mu > 0$. Ni prenas unu punkton c troviĝantan sur la arko $\widehat{ab}$ kaj signas per $F_1(\lambda, \mu)$, $F_2(\lambda, \mu)$ respektive la analitikajn funkciojn kiuj koincidas kun la integraloj

$$\int_a^c (b-x)^{\lambda-1}(x-a)^{\mu-1} dx\,, \qquad \int_c^b (b-a)^{\lambda-1}(x-a)^{\mu-1} dx$$

por $\Re\lambda > 0$, $\Re\mu > 0$. $F_1(\lambda, \mu)$ estas holomorfa kiam μ diferencas de 0 kaj negativaj entjeroj; $F_2(\lambda, \mu)$ estas holomorfa kiam λ diferencas de 0 kaj negativaj entjeroj. Ni havas do

$$\left[\int_a^b (b-x)^{\lambda-1}(x-a)^{\mu-1} dx = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}(b-a)^{\lambda+\mu-1}. \tag{14.2}$$

Derivante tiun rilaton rilate al λ, μ, ni ricevas

$$\left[\int_a^b (b-x)^{\lambda-1}(x-a)^{\mu-1}(\log(b-x))^m(\log(x-a))^n dx \right. \tag{14.3}$$
$$= \frac{\partial^{m+n}}{\partial\lambda^m \partial\mu^n}\left\{\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}(b-a)^{\lambda+\mu-1}\right\}.$$

3° Supozu nun ke $\mu=-k$ egalas nulon aŭ negativan entjeron kaj ke λ diferencas de nulo kaj negativaj entjeroj.

$$\left[\int_a^b (b-x)^{\lambda-1}(x-a)^{-k-1}dx = \lceil F_1(\lambda,\mu)\rfloor^{\mu=-k} + F_2(\lambda,-k)\right.$$
$$= \lceil F(\lambda,\mu)\rfloor^{\mu=-k}.$$

Ni havas do

$$\left[\int_a^b (b-x)^{\lambda-1}(x-a)^{-k-1}dx = \left[\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}(b-a)^{\lambda+\mu-1}\right]^{\mu=-k}. \tag{14.4}$$

Pli ĝenerale ni havas

$$\left[\int_a^b (b-x)^{\lambda-1}(x-a)^{-k-1}(\log(x-a))^n dx\right.$$
$$= \left[\frac{\partial^n}{\partial\mu^n}F_1(\lambda,\mu)\right]^{\mu=-k} + \left[\frac{\partial^n}{\partial\mu^n}F_2(\lambda,\mu)\right]^{\mu=-k}$$
$$= \left[\frac{\partial^n}{\partial\mu^n}F(\lambda,\mu)\right]^{\mu=-k}.$$

Ni havas do

$$\left[\int_a^b (b-x)^{\lambda-1}(x-a)^{-k-1}(\log(x-a))^n dx\right. \tag{14.5}$$
$$= \left[\frac{\partial^n}{\partial\mu^n}\left\{\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}(b-a)^{\lambda+\mu-1}\right\}\right]^{\mu=-k}.$$

III. Integralo de Riemann-Liouville

15. Difino. φ estu funkcio de Fuchsa tipo en D kaj $C\,(\subset D)$ kurbo sur kiu φ estas holomorfa escepte la komencan ekstremon. La alian ekstremon de C ni signas per x, kiu povas trakuri en D. Se ni fiksas la valoron x, la analitika funkcio de λ kiu koincidas kun

$$\left[\int_C (t-a)^{\lambda-1}\varphi(t)\,dt\right.$$

por λ diferenca de nepozitivaj entjeroj estas meromorfa funkcio de λ kies polusoj $0, -1, -2, \cdots$ estas ĉiuj simplaj. Se do ni dividas ĝin per $\Gamma(\lambda)$, ni ricevas entjeran funkcion de λ, kiun ni signos per $(I^\lambda\varphi)x$. Tiel I^λ respondigas al φ unu funkcion $I^\lambda\varphi$ kiu estas, kiel oni vidos poste, funkcio de Fuchsa tipo en D. $(I^\lambda\varphi)x$ estas nomata *integralo de Riemann-Liouville*. Kiam estas necese montri ke la komenca punkto de integrovojo estas a, ni skribos ${}_aI^\lambda$. La lineareco de la operacio I^λ:

$$I^\lambda(\alpha\varphi+\beta\psi) = \alpha I^\lambda\varphi + \beta I^\lambda\psi$$

estas evidenta.

Ni povas facile kalkuli $I^\lambda\varphi$ kiam φ estas potenclogaritma monomo.

Anstataŭigante en la formulo (14.3) x, b, μ, m, n respektive per t, x, $\rho+1$, 0, m kaj dividante ĝin per $\Gamma(\lambda)$, ni ricevas por (10.2) la egalaĵon

$$(I^\lambda\varphi)(x)=\frac{\partial^m}{\partial\rho^m}\left\{\frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\lambda+\rho+1)}(x-a)^{\lambda+\rho}\right\}$$

sub la hipotezo ke $\lambda-1$ kaj ρ estas diferencaj de negativaj entjeroj. Tamen la hipotezo rilata al λ estas forigebla, ĉar la du flankoj estas entjeraj funkcioj de λ. Ni hvas do

$$(15.1)\qquad ({}_aI_t^\lambda(t-a)^\rho(\log(t-a))^m)(x)=\frac{\partial^m}{\partial\rho^m}\left\{\frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\lambda+\rho+1)}(x-a)^{\lambda+\rho}\right\}$$

por ρ diferenca de negativa entjero. Ĉi tie la subindico t de I signifas ke la esprimo skribata dekstre de I estas konsiderata kiel funkcio de t, t. e. ke t estas la integrovarianto.

Sammaniere la formulo (14.5) sekvigas

$$(15.2)\qquad ({}_aI_t^\lambda(t-a)^{-k}(\log(t-a))^m)(x)=\left[\frac{\partial^m}{\partial\rho^m}\left\{\frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\lambda+\rho+1)}(x-a)^{\lambda+\rho}\right\}\right]^{\rho=-k}$$

por pozitiva entjero k. Se partikulare $\lambda=1$, tiu formulo skribiĝas

$$(15.3)\qquad ({}_aI_t^1(t-a)^{-k}(\log(t-a))^m)(x)$$
$$=\begin{cases}-\dfrac{m!(x-a)^{1-k}}{(k-1)^{m+1}}\displaystyle\sum_{j=0}^{m}\frac{((k-1)\log(x-a))^j}{j!} & (k\neq 1)\\[2ex] \dfrac{(\log(x-a))^{m+1}}{m+1} & (k=1)\end{cases}$$

16. *n*-foja derivado kaj *n*-foja integrado. n estu nepozitiva entjero kaj supozu ke $\Re\lambda>-n-1$ kaj ke φ estas holomorfa ĉe a. Tiam ni havas per la partaj integradoj

$$(I^\lambda\varphi)x=-\left[\frac{(x-t)^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\varphi(t)+\frac{(x-t)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+2)}\varphi'(t)+\cdots+\frac{(x-t)^{\lambda+n}}{\Gamma(\lambda+n+1)}\varphi^{(n)}(t)\right]_a^x$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\lambda+n+1)}\int_a^x(x-t)^{\lambda+n}\varphi^{(n+1)}(t)\,dt,$$

supozante ke λ diferencas de nepozitiva entjero. La integrita parto nuliĝas por $t=x$, kaj ni havas

$$(I^\lambda\varphi)x=\frac{(x-a)^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\varphi(a)+\frac{(x-a)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+2)}\varphi'(a)+\cdots+\frac{(x-a)^{\lambda+n}}{\Gamma(\lambda+n+1)}\varphi^{(n)}(a)$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\lambda+n+1)}\int_a^x(x-t)^{\lambda+n}\varphi^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Ĉi tie la du flankoj estas holomorfaj ĉe $\lambda=-n$ kaj ni povas meti $\lambda=-n$. Ni havas do

$$(I^{-n}\varphi)x=\varphi^{(n)}(a)+\int_a^x\varphi^{(n+1)}(t)\,dt=\varphi^{(n)}(x).$$

Se $\varphi(x)$ havas ĉe a potenclogaritman punkton, oni havas

$$({}_aI^\lambda\varphi)x=({}_bI^\lambda\varphi)x+\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\left[\int_a^b(x-t)^{\lambda-1}\varphi(t)dt.\right.$$

La dua termo en la dekstra flanko nuliĝas por $\lambda=-n$ kaj la unua termo koincidas kun $\varphi^{(n)}(x)$, ĉar $\varphi(x)$ estas holomorfa ĉe b.

Konsekvence,

16.1 *Se n estas pozitiva entjero, I^{-n} estas la n-foja derivado D^n sen escepto kaj I^0 estas identa aplikado:* $I^0\varphi=\varphi$.

Se la integralo $\int_a^x \varphi(t)\,dt$ konverĝas, oni havas

$$(16.1)\qquad ({}_aI^n\varphi)x=\int_a^x dt_n\int_a^{t_n} dt_{n-1}\cdots\int_a^{t_2}\varphi(t_1)\,dt_1$$

por pozitiva entjero n. Tio estas bone konata fakto. Ni volas ĝeneraligi ĝin al la kazo en kiu la integralo de φ ne konverĝas.

Ni komencos de la kazo de potenclogaritma monomo (10.2). Se ρ ne estas negativa entjero, ni havas

$$(16.2)\qquad (I^n\varphi)x=\frac{\partial^m}{\partial\rho^m}\left\{\frac{(x-a)^{\rho+n}}{(\rho+1)(\rho+2)\cdots(\rho+n)}\right\}.$$

Tiu ĉi estas polinomo de $\log(x-a)$ kies koeficiento estas potencaj monomoj de $x-a$ kun la potenca indico $\rho+n$. Do ĝia finita parto ĉe a estas 0.

Derivante (16.2), ni tuj vidas

$$(16.3)\qquad \frac{d}{dx}(I^n\varphi)x=(I^{n-1}\varphi)x\,.$$

Ni havas do

$$(16.4)\qquad ({}_aI^n\varphi)x=\left[\int_a^x({}_aI^{n-1}\varphi)t\,dt\,.\right.$$

Metante ĉi tie $n=1$, ni ricevas

$$(16.5)\qquad ({}_aI^1\varphi)x=\left[\int_a^x\varphi(t)\,dt\right.$$

kiam la potenca indico de φ ĉe a ne estas negativa entjero. Tion rimarkante, ni povas skribi la rilaton (16.4) sub la formo

$$(16.4)'\qquad {}_aI^n\varphi={}_aI^1\,{}_aI^{n-1}\varphi\,.$$

Dank'al la linearco de la operacio I^λ, tiu ĉi estas valida kiam φ havas ĉe a simplan potenclogaritman punkton kun la potenca indico diferenca de entjero. (16.4)′ sekvigas tuj

$$(16.6)\qquad {}_aI^n\varphi=({}_aI^1)^n\varphi\,,$$

t. e.

$$(16.6)'\qquad ({}_aI^n\varphi)x=\left[\int_a^x dt_n\left[\int_a^{t_n}dt_{n-1}\cdots\left[\int_a^{t_2}\varphi(t_1)\,dt_1\,.\right.\right.\right.$$

Se $\rho=-k$ estas negativa entjero, ni havas

$$(16.2)'\qquad (I^n\varphi)x=\left[\frac{\partial^m}{\partial\rho^m}\left\{\frac{(x-a)^{\rho+n}}{(\rho+1)(\rho+2)\cdots(\rho+n)}\right\}\right]^{\rho=-k}.$$

Derivante tiun rilaton rilate al x, ni vidas (16.3). La dekstra flanko de

(16.2)′ estas polinomo de $\log(x-a)$ kies koeficientoj estas potencaj monomoj de $x-a$ kun la potenca indico $n-k$. Do la finita parto de $(I^n\varphi)x$ ĉe a estas 0 por $n \neq k$, kaj ni havas ankaŭ (16.4). Sekve la formulo (16.6) estas valida por negativa entjero $\rho < -n$.

Ĉar ni havas

$$\frac{\partial^m}{\partial\rho^m}\left\{\frac{(x-a)^{\rho+1}}{\rho+1}\right\} = \frac{\partial^m}{\partial\rho^m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\rho+1)^{n-1}(\log(x-a))^n}{n!},$$

(16.2)′ sekvigas

$$(I^1\varphi)x = \frac{(\log(x-a))^{m+1}}{m+1} \tag{16.7}$$

por $\rho=-1$. La finita parto de la dekstra flanko estas 0 ĉe a. *Ni havas do* (16.5) *kaj*, pro la lineareco de la operacio ${}_aI^1$, *tiu formulo estas ĉiam valida.*

Supozu nun $k=n>1$. Ni vidas facile ke la finita parto de $(I^n\varphi)x$ ĉe a havas la valoron

$$\left[\frac{\partial^m}{\partial\rho^m}\left\{\frac{1}{(\rho+1)(\rho+2)\cdots(\rho+n)}\right\}\right]^{\rho=-n} = \frac{(-1)^{n-1}\cdot m!}{(n-1)!}\sum_{(k)}^{n}\prod_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n-j}\right)^{k_j},$$

kie $\sum_{(k)}^{n}$ signifas la sumon etenditan al la aranĝoj $k_1, \cdots, k_n$, $(k_1+\cdots+k_{n-1}=n)$. Ni havas do

$$({}_aI^n\varphi)x = (({}_aI^1)^n\varphi)x + \frac{(-1)^{n-1}\cdot m!}{(n-1)!}\sum_{(k)}^{n}\prod_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n-j}\right)^{k_j}.$$

Konsideru fine la kazon $n>k>1$. Tiam ni havas

$$({}_aI^n\varphi)x = (({}_aI^1)^{n-k}({}_aI^k\varphi))x$$

kaj la ĵus demonstracita formulo montras ke oni havas

$$({}_aI^n\varphi)x = (({}_aI^1)^n\varphi)x + \frac{(x-a)^{n-k}}{(n-k)!}\sum_{(k)}^{k}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^{k-1}\cdot m!}{(k-1)!(k-j)^{k_j}}. \tag{16.8}$$

La ĉi supre akiritaj rezultatoj povas resumiĝi jene

16.2 *$\varphi(t)$ estu la potenclogaritma monomo* (10.2). *Tiam la formulo* (16.5) *estas valida sen escepto. La formulo* (16.6) *estas valida por pozitiva entjero n se la potenca indico ρ diferencas de $-2, \cdots, -n$. Se ρ egalas negativan entjeron $-k$ $(1<k\leqq n)$, ni havas* (16.8). *En ĉiu kazo $({}_aI^n\varphi)x$ estas polinomo de* $\log(x-a)$ *kies grado estas maksimume $m+1$ kaj kies koeficientoj estas potencaj monomoj kun la potenca indico $\rho+n$.*

Dank'al la lineareco de I^n, oni ĉiam havas

$$D^nI^n\varphi = \varphi\,. \tag{16.9}$$

17. Vico de integraloj de Riemann-Liouville. La propozicio **13.2** sekvigas tuj la jenan propozicion

17.1 *Supozu ke la vico de funkcioj $f_k(x)$ holomorfaj en ia domajno D konverĝas al $f(x)$ uniforme en D. φ estu la potenclogaritma monomo* (10.2). *Tiam oni havas*

$$({}_aI^\lambda\varphi f_k)x \to ({}_aI^\lambda\varphi f)x \tag{17.1}$$

uniforme por $a \in D$, $x \in D$, $x \neq a$ *kaj* ρ *diferenca de negativaj entjeroj aŭ por* $a \in D$, $x \in D$, $x \neq a$ *kaj* $\rho = -n$ (*negativa entjero*).

$f(x)$ estu funkcio holomorfa ĉe a. Ni havas do la ekspansion (13.3). $f_k(x)$ estu la parta sumo (13.4). La vico de partaj sumoj $\{f_k(x)\}$ konverĝas al $f(x)$ uniforme ĉirkaŭ a. Ni havas do (17.1) uniforme ĉirkaŭ a. De tio ni povas konkludi ke oni havas la ekspansion

$$(17.2) \qquad ({}_aI^\lambda \varphi f)x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, {}_aI_t^\lambda(\varphi(t)(t-a)^n)x \, .$$

Aliparte la formuloj establitaj en n-ro 15 montras ke oni havas

$$(17.3) \qquad {}_aI^\lambda(\varphi(t)(t-a)^n)x = \left[\frac{\partial^m}{\partial \rho^m} \left\{ \frac{\Gamma(\rho+n+1)(x-a)^{\lambda+\rho+n}}{\Gamma(\lambda+\rho+n+1)} \right\} \right]^\rho$$

kaj ni vidas ke la dekstra flanko estas polinomo de $\log(x-a)$ kies grado estas maksimume $m+1$ kaj kies koeficientoj estas potencaj monomoj kun la indico $\lambda+\rho+n$.

Por ke la unua termo en la ekspansio (17.2) nuliĝu estas necese ke $\Gamma(\rho+1)/\Gamma(\lambda+\rho+1)$ nuliĝu. Ĉar se ĝi ne nuliĝas, la esprimo

$$(17.4) \qquad \left[\frac{\partial^m}{\partial \rho^m} \left\{ \frac{\Gamma(\rho+1)(x-a)^{\lambda+\rho+1}}{\Gamma(\lambda+\rho+1)} \right\} \right]^\rho$$

estas polinomo de $\log(x-a)$ kies grado estas ekzakte m aŭ $m+1$ laŭ tio se ĝi restas finita aŭ infinitiĝas. Se ĝi nuliĝas, la esprimo estas polinomo de $\log(x-a)$ kies grado estas ekzakte $m-1$ se $m>0$. La esprimo (17.4) nuliĝas do nur kiam oni havas

$(17.5)_0$ $\quad m=0$, $\rho \neq$ negativa entjero, $\lambda+\rho=$ negativa entjero.

Pli ĝenerale, ni povas konkludi ke *la esprimo* (17.3) *nuliĝas nur kiam oni havas*

$(17.5)_n$ $\quad m=0$, $\rho+n \neq$ *negativa entjero*, $\lambda+\rho+n=$ *negativa entjero*.

Rimarkante la ekspansion (17.2), ni alvenas al la propozicio

17.2 $\varphi(x)$ *estu la potenclogaritma monomo* (10.2) *kaj supozu ke oni havas la ekspansion* (13.3) *kun* $c_0 \neq 0$. *Tiam* $(I^\lambda \varphi f)x$ *havas ĉe* a *simplan potenclogaritman punkton. Ĝia potenca grado estas* $\lambda+\rho$ *aŭ* $\lambda+\rho$ *plus pozitiva entjero laŭ tio se oni ne havas aŭ havas* $(17.5)_0$. *Ĝi nuliĝas idente nur kiam oni havas* $(17.5)_n$ *por* $c_n=0$.

Do, por ke $I^\lambda \varphi f$ nuliĝu idente, estas necese ke $f(x)$ estu polinomo. Se n estas ĝia grado, oni devas havi $(17.5)_n$. Se plie ρ diferencas de la negativaj entjeroj $-1, \cdots, -n$, $(17.5)_n$ sekvigas $(17.5)_0, (17.5)_1, \cdots, (17.5)_{n-1}$. Do $J^\lambda \varphi f$ nuliĝas idente.

Ekzemple, se $\lambda=-m$ estas negativa entjero pli malgranda ol $-n$, $I^\lambda f$ nuliĝas idente. Tio signifas ke la m-a derivito de n-agrada polinomo estas idente nula se $m>n$.

Nu φ estu funkcio de Fuchsa tipo en ia domajno D kaj metu $\psi={}_aI^\lambda\varphi$. La propozicio **17.2** montras ke $\psi(x)$ havas ĉe a potenclogaritman punkton. Supozu ke la analitika plilongigo laŭ ia kurbo C ($\subset D$) kun la komenca punkto a kondukas nin al singula punkto b de ψ. Se x apartenas al sufiĉe malgranda ĉirkaŭaĵo de b, ni havas

$$\psi(x)=({}_bI^\lambda\varphi)\,x+\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\left[\int_a^b(x-t)^{\lambda-1}\varphi(t)\,dt\,.\right.$$

La unua termo en la dekstra flanko havas ĉe b, laŭ la propozicio **17.2**, regulan punkton aŭ potenclogaritman punkton, dum la dua estas konstanto. $\psi(x)$ havas do ĉe b regulan aŭ potenclogaritman punkton, kaj ni povas mencii la propozicion

17.3 *Se φ estas funkcio de Fuchsa tipo en D, $I^\lambda\varphi$ estas ankaŭ funkcio de Fuchsa tipo en D.*

18. Derivado rilata al parametro. Anstataŭigante λ per $\lambda-1$ en la formulo (12.4) kaj dividante ĝin per $\Gamma(\lambda)$, ni ricevas

$$\frac{\partial}{\partial t}{}_aI_s^\lambda((s-a)^\rho(\log(s-a))^m f(s,t))={}_aI_s^\lambda((s-a)^\rho(\log(s-a))^m\frac{\partial}{\partial t}f(s,t)) \tag{18.1}$$

por λ diferenca de nepozitiva entjero. Ĉi tie oni supozas ke $f(s,t)$ estas holomorfa funkcio de s, t. Kiam $\lambda=-n$ estas nepozitiva entjero, ${}_aI^\lambda=D^n$ estas n-foja derivado kaj la formulo estas evidenta. Do *la formulo* (18.1) *estas valida sen escepto.*

Simile anstataŭigante λ, p, q respektive per $\lambda-1$, 0, m en la formulo (12.5) kaj dividante ĝin per $\Gamma(\lambda)$, ni ricevas

$$\frac{\partial^m}{\partial\rho^m}{}_aI_s^\lambda((s-a)^\rho f(s))={}_aI_s^\lambda((s-a)^\rho(\log(s-a))^m f(s))\,. \tag{18.2}$$

Ĉi tie oni supozas la holomorfecon de $f(s)$. *Tiam tiu formulo estas valida se ρ diferencas de negativaj entjeroj. λ povas esti negativa entjero.*

La ĉi supre akiritaj rezultatoj sekvigas tuj la propozicion

18.1 *$f(s,t)$ estu funkcio holomorfa por $s\in D$, $t\in\Delta$ kaj $\varphi(x)$ la potenclogaritma monomo* (10.2), *kie $a\in D$. Tiam $({}_aI^\lambda\varphi f)x$ estas holomorfa rilate al x, λ, ρ, t por $x\in D$, $x\neq a$, $t\in\Delta$, $\rho\neq$ negativa entiero, aŭ rilate al x, λ, t por $x\in D$, $x\neq a$, $t\in\Delta$, $\rho=$ negativa entjero.*

19. Fundamenta formulo. Se, supozante la absolutan konverĝon de la integraloj, ni faras la kalkulon, ni ricevas

$$\begin{aligned}(I^\mu I^\lambda\varphi)\,x&=\frac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}\int_a^x\varphi(t)\,dt\int_t^x(t-s)^{\mu-1}(s-t)^{\lambda-1}ds\\&=\frac{1}{\Gamma(\lambda+\mu)}\int_a^x(x-t)^{\lambda+\mu-1}\varphi(t)\,dt=(I^{\lambda+\mu}\varphi)\,x\,.\end{aligned}$$

Ni havas do la formulon

$$(19.1) \qquad {}_aI^{\mu}{}_aI^{\lambda}\varphi = {}_aI^{\lambda+\mu}\varphi$$

se $\Re\lambda$ kaj $\Re\mu$ estas pozitivaj kaj sufiĉe grandaj.

Supozu ke $\varphi(x)$ havas ĉe a simplan potenclogaritman punkton kun la potenca indico ρ. Tiam $({}_aI^{\lambda}\varphi)x$ havas ĉe a simplan potenclogaritman punkton kun la potenca indico $\lambda+\rho+n$ kie n estas nenegativa entjero, kaj estas entjera funkcio de λ. Sekve la maldekstra flanko de (19.1) estas holomorfa rilate al λ, μ se $\lambda+\rho$ diferencas de negativa entjero, dum la dekstra flanko estas entjera funkcio de $\lambda+\mu$. *La formulo estas do valida se $\lambda+\rho$ diferencas de negativa entjero.*

Ni konsideru nun la kazon en kiu ni havas (10.2) kaj $\lambda=-1$. Derivante (15.1) aŭ (15.2) rilate al x, ni vidas ke oni havas

$$(D_aI^{\lambda}\varphi)x = ({}_aI^{\lambda-1}\varphi)x$$

sen escepto. Ripetante n-foje la derivadon, ni ricevas ĉiam

$$(D^n{}_aI^{\lambda}\varphi)x = ({}_aI^{\lambda-n}\varphi)x\ .$$

Ĉar ni havas $I^{-n}=D^n$, la formulo (19.1) estas valida por $\mu=-n$ kian ajn valoron prenas λ. Ni supozis ke $\varphi(x)$ estis potenclogaritma monomo. Sed pro la lineareco de la operacio, tiu hipotezo estas forigebla.

La ĉi supre ricevitajn rezultatojn ni povas resumi jene.

19.1 *$\varphi(x)$ estu funkcio kiu havas ĉe a simplan potenclogaritman punkton kun la potenca indico ρ. Se $\lambda+\rho$ diferencas de negativa entjero aŭ se μ egalas nepozitivan entjeron, oni havas la rilaton* (19.1).

20. Ŝanĝo de integrovarianto. $f(s)$ estu funkcio holomorfa sur ia kurbo Γ alliganta α al ξ kaj C la kurbo desegnata de $t=f(s)$ kiam s kuras laŭ Γ. Ni demandos nun ĉu oni havas la formulon

$$(20.1) \qquad \left[\int_C \varphi(t)\,dt = \left[\int_\Gamma \varphi(f(s))\,f'(s)\,ds\ ,\right.\right.$$

supozante ke $\varphi(t)$ estas holomorfa sur C escepte la komencan ekstremon a kie $\varphi(t)$ havas potenclogaritman punkton.

La maldekstra flanko de (20.1) estas funkcio $\Phi(x)$ de la fina ekstremo $x=f(\xi)$ de C kaj se ni metas

$$(20.2) \qquad \Psi(s) = \Phi(f(s))\,,$$

la dekstra flanko estas $\lceil\Psi(s)\rfloor_\Gamma$. Do por ke oni havu (20.1), estas necese kaj sufiĉe ke la finita parto de $\Psi(s)$ nuliĝu ĉe $s=\alpha$. Tiu kondiĉo ĉiam realiĝas se

$$(20.3) \qquad f(s)-a = (s-\alpha)^m\,,$$

kie m estas pozitiva entjero.

Ni havas do la propozicion

20.1 *$f(s)$ estu funkcio holomorfa sur ia kurbo Γ alliganta α al ξ kaj C la*

respondanta kurbo en la ebeno de $t=f(s)$. *Ni metas* $a=f(\alpha)$, $x=f(\xi)$ *kaj difinas* $\Psi(s)$ *per* (20.2), *signante per* $\Phi(x)$ *la maldekstran flankon de* (20.1). *Tiam, por ke oni havu* (20.1), *estas necese kaj sufiĉe ke* $[\Psi(s)]^{\alpha}$ *nuliĝu. Tiu kondiĉo ĉiam realiĝas por* (20.3).

Supozu nun ke $t=1/s$ respondigas la kurbon C al la kurbo Γ alliganta 0 al ξ en la ebeno de s. La komenca ekstremo de C estas ∞ kaj la fina estas $x=1/\xi$. Ni difinas la finitan parton de la integralo de $\varphi(t)$ etendita laŭ C per la formulo (20.1), metante $f(s)=1/s$. Tiam la formulo restas ankoraŭ vera por

$$f(s) = (s-\alpha)^{-m},$$

kie m estas pozitiva entjero.

21. Integralo laŭ la kurbo atinganta la infinitumon. $\varphi(t)$ estu funkcio holomorfa sur ia kurbo C alliganta ∞ al x escepte la komencan ekstremon ∞, kie $\varphi(t)$ havas potenclogaritman punkton. La transformo $s=1/t$ respondigas al la kurbo C unu kurbon Γ en la ebeno de s. Kiam la integralo konverĝas, ni havas

$$\int_C (x-t)^{\lambda-1}\varphi(t)dt=e^{\pi i\lambda}y^{1-\lambda}\int_\Gamma (y-s)^{\lambda-1}\varphi(1/s)s^{-\lambda-1}ds,$$

metante $y=1/x$; por la argumetoj de y, s kaj $y-s$ ni prenas la valorojn

$$\arg s=-\arg t, \qquad \arg y=-\arg x,$$
$$\arg(y-s)=\arg(x-t)-\arg t-\arg x-\pi.$$

Ni metas do

$$\psi(s) = \varphi(1/s)^{-\lambda-1}s \tag{21.1}$$

kaj difinas $({}_\infty I^\lambda\varphi)x$ per

$$({}_\infty I^\lambda\varphi)x=e^{\pi i\lambda}x^{\lambda-1}({}_0I^\lambda\psi)(1/x). \tag{21.2}$$

Ĉi tie ψ dependas de λ. Ni supozas ke tiu λ estas nedependa de la surindico λ de I, t. e. ni metas $\mu=\lambda$ post kiam ni aplikis la operacion ${}_0I^\lambda$ al

$$\psi(s) = \varphi(1/s)s^{-\mu-1}.$$

Nu ni rimarku ke ${}_\infty I^{-n}$ *koincidas kun la n-foja derivado* D^n. Por tio estas sufiĉe montri ke oni havas

$$\varphi^{(n)}(1/s)=(-1)^n s^{n+1}\frac{d^n}{ds^n}[s^{n-1}\varphi(1/s)]. \tag{21.3}$$

Tiu formulo estas evidenta kiam $n=0$, 1. Por demonstracii ĝin per matematika indukto, ni supozas ĝin vera. Tiam ni havas

$$\frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}[s^n\varphi(1/s)]=s\frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}[s^{n-1}\varphi(1/s)]+(n+1)\frac{d^n}{ds^n}[s^{n-1}\varphi(1/s)]$$
$$=(-1)^{n-1}s^{-n-2}\varphi^{(n+1)}(1/s).$$

Do la formulo restas vera kiam n estas anatataŭata de $n+1$.

Se $\varphi(t)$ havas ĉe ∞ simplan potenclogaritman punkton kun potenca indico ρ, $\psi(s)$ havas ĉe ∞ simplan potenclogaritman punkton kun la potenca indico $\rho-\mu-1$ $(\mu=\lambda)$. La propozicio 18.1 sekvigas do la jenan.

21.1 *$f(t)$ estu funkcio holomorfa en ia domajno D enhavanta ∞ kaj $\varphi(t)$ la potenclogaritma monomo*

$$\varphi(t) = t^{-\rho}(-\log t)^m. \tag{21.4}$$

Tiam $({}_\infty I^\lambda \varphi f)x$ estas funkcio holomorfa de x, λ, ρ por $x\in D$, $x\neq\infty$, $\rho-\lambda\neq$ nepozitiva entjero. Ĝi estas holomorfa rilate al x, λ ankaŭ por $x\in D$, $x\neq\infty$, $\rho-\lambda=$nepozitiva entjero. Se $f(t)$ dependas de ia parametro σ holomorfmaniere en la domajno Δ, ĝi estas holomorfa ankaŭ rilate al tiu parametro σ en Δ.

Se ni supozas la absolutan konverĝon de la integraloj en la kalkulo, ni havas

$$\begin{aligned}({}_\infty I^\mu {}_\infty I^\lambda \varphi)x &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}\int_\infty^x (x-t)^{\mu-1}dt\int_\infty^t (t-s)^{\lambda-1}\varphi(s)\,ds\\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}\int_\infty^x \varphi(s)\,ds\int_s^x (x-t)^{\mu-1}(t-s)^{\lambda-1}dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda+\mu)}\int_\infty^x (x-s)^{\lambda+\mu-1}\varphi(s)\,ds = ({}_\infty I^{\lambda+\mu}\varphi)x\,.\end{aligned}$$

Ni havas do la formulon

$$({}_\infty I^\mu {}_\infty I^\lambda \varphi)x = ({}_\infty I^{\lambda+\mu}\varphi)x \tag{21.5}$$

en la domajno kie la du flankoj estas holomorfaj. Se $\varphi(t)$ havas ĉe ∞ simplan potenclogaritman punkton kun la potenca indico ρ, $({}_\infty I^\lambda\varphi)x$ estas holomorfa rilate al λ, ρ escepte kiam $\rho-\lambda$ egalas nepozitivan entjeron kaj havas ĉe ∞ simplan potenclogaritman punkton kun la potenca indico $\rho-\lambda$. La maldekstra flanko estas do holomorfa rilate al λ, μ, ρ escepte kiam unu el la $\rho-\lambda$, $\rho-\lambda-\mu$ egalas nepozitivan entjeron. Dume la dekstra flanko estas holomorfa escepte kiam $\rho-\lambda-\mu$ egalas nepozitivan entjeron. La formulo estas do valida kiam $\rho-\lambda$ kaj $\rho-\lambda-\mu$ diferencas de nepozitivaj entjeroj.

Ni diros ke la formulo (21.5) restas ankoraŭ valida eĉ kiam $\rho-\lambda-\mu=-n$ egalas nepozitivan entjeron kondiĉe ke $\rho-\lambda$ diferencas de negativa entjero.

Efektive ε estu malgranda parametro kaj metu

$$\varphi_\varepsilon(t) = t^{-\varepsilon}\varphi(t)\,.$$

Se $\varepsilon\neq 0$, ni havas

$$({}_\infty I^\mu {}_\infty I^\lambda \varphi_\varepsilon)x = ({}_\infty I^{\lambda+\mu}\varphi_\varepsilon)x\,.$$

Prenante la finitan parton ĉe $\varepsilon=0$ de la du flankoj, ni ricevas (21.5).

Se $\mu=-n$ estas 0 aŭ negativa entjero, la formulo (21.5) estas valida sen escepto. Por tion montri estas sufiĉe konsideri la kazon en kiu $\varphi(t)$ estas

potenclogaritma monomo (21.4). En tiu kazo, ni havas

$$\psi(s) = s^{\rho-\lambda-1}(\log s)^m$$

kaj

$$({}_\infty I^\lambda \varphi)\, x = e^{\pi i \lambda}\left[\frac{\partial^m}{\partial \rho^m}\left\{\frac{\Gamma(\rho-\lambda)\, x^{\lambda-\rho}}{\Gamma(\rho)}\right\}\right]^\rho .$$

Ni havas do

$$\begin{aligned}
({}_\infty I^{-n}\,{}_\infty I^\lambda \varphi)\, x &= e^{\pi i \lambda}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[\frac{\partial^m}{\partial \rho^m}\left\{\frac{\Gamma(\rho-\lambda)\, x^{\lambda-\rho}}{\Gamma(\rho)}\right\}\right]^\rho \\
&= e^{\pi i \lambda}\left[\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^n \partial \rho^m}\left\{\frac{\Gamma(\rho-\lambda)\, x^{\lambda-\rho}}{\Gamma(\rho)}\right\}\right]^\rho \\
&= e^{\pi i (\lambda+n)}\left[\frac{\partial^m}{\partial \rho^m}\left\{\frac{\Gamma(\rho-\lambda+n)\, x^{\lambda-\rho-n}}{\Gamma(\rho)}\right\}\right]^\rho \\
&= ({}_\infty I^{\lambda-n}\varphi)\, x .
\end{aligned}$$

Ni havas do la propozicion

21.2 *$\varphi(x)$ estu funkcio havanta ĉe ∞ simplan potenclogaritman punkton kun la potenca indico ρ. Tiam ni havas la formulon* (21.5) *se $\rho-\lambda$ diferencas de nepozitiva entjero, aŭ se $\mu=-n$ estas nepozitiva entjero. Partikulare ni havas $D^n\,{}_\infty I^n = I^0$.*

Bibliografio

[1] J. Hadamard, Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles hyperboliques, Paris, Hermann, 1932.

[2] M. Hukuhara, Integrado de ordinaraj diferencialaj ekvacioj (japane), Tokyo, Iwanami, 1941.

[3] M. Hukuhara, Diferencialaj ekvacioj (japane), Tokyo, Asakura, 1941.

[4] M. Hukuhara, Finitaj partoj de funkcioj kaj de integraloj (japane), Kyûdai Kenkyû Hôkoku, **1** (1943), 1-26.

[5] M. Riesz, Intégrale de Riemann-Liouville et potentiels, Acta Szeged, **9** (1938), 1-42.

[6] M. Riesz, Intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy pour l'équation des ondes, Conférences de la Réunion Internationale des Mathématiciens, tenues à Paris en Juillet 1937, (1939), 153-170.

[7] M. Riesz, L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy. Acta Math **81** (1949), 1-223.

(Ricevita la 11-an de decembro, 1961)