

Sur l'Existence d'une Branche de Solutions Positives pour une Equation Différentielle sur $\mathbf{R}$

By

Alice CHALJUB-SIMON and Peter VOLKMANN

(Université d'Orléans, France and Universität Karlsruhe, Germany)

1. Notations et résultats

On fixe δ, c tels que: $0 < \delta < c$ et on considère l'équation:

$$(1) \quad -y'' + c^2 y = \lambda f(x, y)$$

où: $\lambda \geq 0$.

Définitions: $C_\delta^0 = \{y|y: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \text{ continue, telle que:}$

$$\|y\|_{0,\delta} = \sup_x e^{\delta|x|} |y(x)| < \infty\}$$

$$K = \{y|y \in C_\delta^0, y \geq 0\}.$$

C_δ^0 est un espace de Banach (c.f. [1]).

On cherche des solutions de (1) dans K .

Théorème 1. *Sous les hypothèses suivantes:*

$$f: \mathbf{R} \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \text{ continue}$$

(2) *Quel que soit $r > 0$, il existe L_r , tel que*

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L_r(\bar{y} - y), \quad 0 \leq y \leq \bar{y} \leq re^{-\delta|x|}$$

(3) *$f(x, 0) \not\equiv 0$, il existe $\beta_1 > 0$, tel que: $f(x, 0) \leq \beta_1 e^{-\delta|x|}$.*

Alors il existe $\lambda_0 > 0$ et $\lambda \rightarrow y_\lambda$ dans $C([0, \lambda_0], K)$ solution de (1), avec: $y_0 = 0$, $y_\lambda(x) > 0$ ($\lambda \neq 0$).

Théorème 2. *Sous les hypothèses du théorème 1, et en outre:*

$$(4) \quad f(x, y) \geq \beta_0 e^{-\delta|x|} + \gamma(x)y, \quad x \in \mathbf{R}, \quad y \geq 0$$

où $\beta_0 > 0$, $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$ continue et $\gamma(x) \not\equiv 0$, il existe $\lambda_1 > 0$, tel que pour $\lambda > \lambda_1$, l'équation (1) ne possède aucune solution dans K .

Remarques. 1° Les conditions (3) et (4) entraînent pour $\beta(x) = f(x, 0)$ la double inégalité:

$$(5) \quad \beta_0 e^{-\delta|x|} \leq \beta(x) \leq \beta_1 e^{-\delta|x|}, \quad \beta_0, \beta_1 > 0.$$

Exemples de fonctions satisfaisant aux conditions des théorèmes 1 et 2:

$$f(x, y) = \beta(x)e^y, \quad f(x, y) = \beta(x)(1 + y)^k, \quad k \geq 1$$

où β satisfait à (5).

2°) Dans la démonstration du théorème 1, la condition (2) n'est nécessaire que pour une valeur de r . Mais la condition complète est utilisée dans la démonstration du théorème 2.

2. Démonstration des théorèmes

On utilise le lemme suivant:

Lemme. Soit K un cône dans un espace de Banach réel E , c'est à dire K fermé, convexe, non vide et $\lambda K \subset K$ ($\lambda \geq 0$) ($K = E$ est admissible).

Soient $F: K \cap B_r(0) \rightarrow K$, $r > 0$

satisfaisant à la condition de Lipschitz:

$$\|F(x) - F(\bar{x})\| \leq L\|x - \bar{x}\|, \quad x, \bar{x} \in K \cap B_r(0)$$

et $\lambda_0 > 0$ tel que:

$$\lambda_0(Lr + \|F(0)\|) < r.$$

Alors il existe une fonction continue: $y: [0, \lambda_0] \rightarrow K \cap B_r(0)$

telle que: $y(\lambda) = \lambda F(y(\lambda))$ ($0 \leq \lambda \leq \lambda_0$)

$B_r(0)$ désigne la boule fermée de E , de centre 0 et de rayon r .

La démonstration de ce lemme découle facilement du théorème de point fixe de Banach.

Démonstration du théorème 1

Soient K le cône des fonctions positives de $E = C_0^0$ et $F: K \rightarrow K$ l'opérateur suivant:

$$(6) \quad (Fy)(x) = (1/2c) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c|x-t|} f(t, y(t)) dt, \quad y \in K$$

D'après (2), pour $y \in K \cap B_r(0)$, F satisfait à une condition de Lipschitz de constante: $L = (L_r \operatorname{ch}(c - \delta))/(c(c - \delta))$.

D'après le lemme, il existe $\lambda_0 > 0$ et une fonction continue

$$\begin{aligned} [0, \lambda_0] &\rightarrow K \cap B_r(0) \\ \lambda &\rightarrow y_\lambda (0 \leq \lambda \leq \lambda_0) \end{aligned}$$

telle que:

$$y_\lambda = \lambda F(y_\lambda) \quad (0 \leq \lambda \leq \lambda_0).$$

D'où le résultat.

Démonstration du théorème 2

1. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que dans (4), la fonction γ est à support compact. Soient L l'opérateur linéaire ($C_\delta^0 \rightarrow C_\delta^0$) défini par:

$$(7) \quad (Ly)(x) = (1/2c) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c|x-t|} \gamma(t) y(t) dt$$

et $g \in C_\delta^0$ donnée par:

$$g(x) = (\beta_0/2c) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c|x-t|} e^{-\delta|t|} dt.$$

On montre que:

$$(8) \quad g \in \text{Int } K$$

et de (4) on déduit que:

$$(9) \quad Fy \geq g + Ly, \quad y \in K$$

Ici $\geq$ désigne la relation d'ordre induite par K dans C_δ^0 .

2. Montrons maintenant la compacité de l'opérateur (7).

Pour $\delta_1 > \delta$, soit:

$$C_{\delta_1}^1 = \{y|y: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \text{ de classe } C^1, y, y' \in C_{\delta_1}^0\}$$

avec: $\|y\|_{1,\delta_1} = \max \{\|y\|_{0,\delta_1}, \|y'\|_{0,\delta_1}\}$.

Alors l'injection: $C_{\delta_1}^1 \rightarrow C_\delta^0$ est compacte (cf [1]). Si, de plus, $\delta_1 < c$, l'opérateur défini par:

$$(L_1 y)(x) = (1/2c) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c|x-t|} y(t) dt$$

est continu de $C_{\delta_1}^0$ dans $C_{\delta_1}^1$. γ étant à support compact, on a: $\gamma \in C_{\delta_1-\delta}^0 L$ se

décompose de la manière suivante:

$$y \rightarrow \gamma y \rightarrow L_1(\gamma y) \rightarrow L_1(\gamma y) = Ly$$

$$C_\delta^0 \rightarrow C_{\delta_1}^0 \rightarrow C_{\delta_1}^1 \rightarrow C_\delta^0$$

Toutes les applications sont continues, la dernière étant compacte.

3. La fonction γ étant choisie comme dans 1., soient

$$a = \inf_{x \in \text{supp } \gamma} (L\gamma)(x) > 0$$

et

$$b = \sup_{x \in R} \gamma(x).$$

Alors si $x \in \text{supp } \gamma$:

$$(L\gamma)(x) \geq a = (a/b)b \geq (a/b)\gamma(x)$$

et l'inégalité:

$$(L\gamma)(x) \geq (a/b)\gamma(x)$$

est aussi trivialement vérifiée, si $x \notin \text{supp } \gamma$. On a donc, avec: $d = a/b$: il existe $d > 0$, et $\gamma \in K$, $\gamma \neq 0$, $L\gamma \geq d\gamma$.

Alors $L: C_\delta^0 \rightarrow C_\delta^0$ est compact, $LK \subset K$, K est un cône reproduisant dans C_δ^0 ($\text{Int } K \neq \emptyset$). D'après un théorème de Krein-Rutman ([2], théorème 6-2), il existe:

$$(10) \quad \mu > 0, \quad \varphi \in K^*, \quad \varphi \neq 0, \quad \text{avec: } L^*\varphi = \mu\varphi.$$

4. Pour conclure, montrons que (1) n'a pas de solutions dans K , pour $\lambda > 1/\mu$. Raisonnons par contradiction: supposons qu'il existe:

$$(11) \quad y \in K, \quad y = \lambda Fy, \quad \lambda > 1/\mu$$

D'après (9):

$$y \geq \lambda g + \lambda Ly$$

De (10), (11), il résulte:

$$\varphi(y) \geq \lambda\varphi(g) + \lambda\varphi(Ly) = \lambda\varphi(g) + \lambda\mu\varphi(y) \geq \lambda\varphi(g) + \varphi(y).$$

D'après (8)(10), $\varphi(g) > 0$, et l'inégalité précédente est impossible.

Références

- [1] Chaljub-Simon, A. et Volkmann, P., Existence of ground states with exponential decay for semi linear elliptic equations in R^n , J. Differential Equations, **76** (1988), 374–390.

- [2] Krein, M. G., Rutman, M. A., Opérateurs linéaires laissant un cône invariant dans un espace de Banach, *Uspehi Mat. Nauk* 3, n° 1 (23) (1948), 3–95 (en russe).

nuna adreso:

Alice Chaljub-Simon
Département de Mathématiques
UFR Faculté des Sciences
BP 6759
45067–Orléans Cedex 2
France

Peter Volkmann
Mathematisches Institut 1
Universität Karlsruhe
7500 Karlsruhe 1–R.F.A.
Germany

(Ricevita la 7-an de marto, 1990)