

Une Classe d'Équations Différentielles Non Linéaires à Singularité Régulière

Par

R. GÉRARD

(Université Louis Pasteur, France)

Introduction.

L'objet de cet article est d'introduire une classe d'équations différentielles non linéaires à singularité régulière. Un opérateur

$$D: C[[x]] \longrightarrow \hat{m}$$

est dit à singularité régulière si pour tout $f \in m$ (idéal maximal de $C\{x\}$) toute solution formelle de

$$Du = f(x)$$

est convergente.

Soient, $F(x, X_0, X_1, \dots, X_n)$ une fonction holomorphe au voisinage de l'origine de $C \times C^{n+1}$ et $\theta_0 = \text{id.}$, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ une suite d'opérateurs linéaires

$$\theta_i: C[[x]] \longrightarrow \hat{m}.$$

Le théorème 1 du § 2, donne des conditions suffisantes sur la suite $\{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n\}$ pour que l'opérateur:

$$Du = F(x, u, \theta_1 u, \dots, \theta_n u)$$

soit à singularité régulière. Dans le § 3, nous donnons les versions équations différentielles du théorème 1 et nous montrons directement c'est à dire sans introduire un système équivalent que les singularités fixes de l'équation VI de P. Painlevé sont régulières. De plus nous montrons que tous les théorèmes classiques à la Briot-Bouquet ainsi que toutes leurs généralisations sont des cas particuliers du théorème 1.

§ 0. Notations, Définitions, Exemples

Notons:

- $C[[x]]$ l'anneau des séries formelles à une indéterminée et à coefficients complexes;
- $\hat{m}$ son idéal maximal;
- $C\{x\}$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes à l'origine de C ou encore

l'anneau des séries convergentes centrées à l'origine de C ;

— $\mathfrak{m}$ son idéal maximal;

— $\hat{\mathcal{L}}_0$ (resp. $\mathcal{L}_0$) l'espace vectoriel sur C des opérateurs C -linéaires envoyant $C[[x]]$ (resp. $C\{x\}$) dans $\hat{\mathfrak{m}}$ (resp. $\mathfrak{m}$).

Un opérateur $D: C[[x]] \rightarrow \hat{\mathfrak{m}}$ (resp. $C\{x\} \rightarrow \mathfrak{m}$) sera dit $\hat{\mathcal{L}}_0$ (resp. $\mathcal{L}_0$)-analytique si

1° il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une fonction $F(x, X_0, X_1, \dots, X_n)$ holomorphe dans un polydisque centré à l'origine de $C \times C^{n+1}$ vérifiant $F(0, 0, \dots, 0) = 0$;

2° une suite finie $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ d'éléments de $\hat{\mathcal{L}}_0$ (resp. $\mathcal{L}_0$) telle que pour tout $u \in \hat{\mathfrak{m}}$ (resp. $\mathfrak{m}$)

$$Du = F(x, u, \theta_1 u, \theta_2 u, \dots, \theta_n u).$$

On notera dans la suite $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ ($\mathcal{L} = \hat{\mathcal{L}}_0$ ou $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$) l'ensemble des opérateurs $\mathcal{L}$ -analytique.

Définition 0.1. Un opérateur $D \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ est dit *singulier* si

$$D(C[[x]]) \subset \hat{\mathfrak{m}} \quad \text{si } \mathcal{L} = \hat{\mathcal{L}}_0$$

et

$$D(C\{x\}) \subset \mathfrak{m} \quad \text{si } \mathcal{L} = \mathcal{L}_0.$$

Définition 0.2. Un opérateur $D \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ singulier est dit *singulier régulier* si pour tout $f \in C\{x\}$, tout série formelle $\hat{u}$ vérifiant

$$D\hat{u} = f(x)$$

est convergente.

Définition 0.3. Un opérateur $D \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ singulier est dit *singulier irrégulier* s'il existe $f \in C\{x\}$ et une série formelle $\hat{u}$ non convergente telle que

$$D\hat{u} = f(x).$$

Tout opérateur $\mathcal{L}$ -analytique peut s'écrire

$$Du = \sum_{\beta + |\alpha| \geq 1} a_{\beta\alpha} x^\beta u^{\alpha_0} (\theta_1 u)^{\alpha_1} \dots (\theta_n u)^{\alpha_n}$$

$$\alpha_i \in \mathbb{N}, \quad |\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad a_{\beta\alpha} \in C.$$

La *partie affine* de D est par définition l'opérateur

$$D_1 u = \sum_{\beta + |\alpha| = 1} a_{\beta\alpha} x^\beta u^{\alpha_0} (\theta_1 u)^{\alpha_1} \dots (\theta_n u)^{\alpha_n}.$$

Un opérateur $\mathcal{L}$ -analytique est dit *affine* s'il se réduit à sa partie affine, ce n'est en général pas un opérateur C -linéaire, mais on lui associe l'opérateur linéaire

$$D_1^0 u = \sum_{|\alpha|=1} a_{0,\alpha} u^{\alpha_0} (\theta_1 u)^{\alpha_1} \cdots (\theta_n u)^{\alpha_n}$$

qu'on appelle le *linéarisé* de D .

Exemple. L'opérateur

$$\begin{aligned} \theta: C\{x\} &\longrightarrow \mathfrak{m} \\ u &\longmapsto x \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

est linéaire, singulier et même singulier régulier. L'opérateur

$$Du = \sum_{i=0}^n a_i (\theta)^{n-i} u, \quad a_i \in C \quad a_0 \neq 0,$$

est linéaire singulier et singulier régulier.

Considérons maintenant

$$Du = \sum_{i=0}^n a_i(x) (\theta)^{n-i} u, \quad a_i \in C\{x\} \quad \text{avec} \quad a_0(x) \neq 0.$$

Cet opérateur est $\mathcal{L}_0$ -analytique dont le linéarisé est

$$D_1^0 u = \sum_{i=0}^n a_i(0) (\theta)^{n-i} u.$$

On sait que D est à singularité régulière si et seulement si $a_0(0) \neq 0$. Soit

$$F(x, X_0, X_1, \dots, X_n) = \sum_{\beta + |\alpha| \geq 1} a_{\beta, \alpha} x^\beta X_0^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$$

une fonction holomorphe dans un polydisque centré à l'origine de $C \times C^{n+1}$, et considérons

$$Du = F(x, u, \theta u, \theta^2 u, \dots, \theta^n u) \quad \text{où} \quad \theta = x \frac{d}{dx}.$$

Nous verrons dans la suite que si le linéarisé de D :

$$D_1^0 u = \sum_{|\alpha|=1} a_{0,\alpha} u^{\alpha_0} (\theta u)^{\alpha_1} \cdots (\theta^n u)^{\alpha_n}$$

est à singularité régulière il en est de même de D .

§ 1. Les bons opérateurs

Considérons le sous espace vectoriel $\mathcal{P}$ de $\mathcal{L}_0$ des opérateurs

$$\varphi: \hat{\mathfrak{m}} \longrightarrow \hat{\mathfrak{m}}$$

de la forme

$$\varphi\left(\sum_{m \geq 1} u_m x^m\right) = \sum_{m=1} \left(\sum_{0 \leq k \leq m} \varphi_k(m-k) u_{m-k} \right) x^m$$

où $\{\varphi_k\}_{k \in N}$ est une suite de fonctions définies sur N .

Exemples.

1) L'identité

$$\text{id.} : \sum_{m \geq 1} u_m x^m \rightsquigarrow \sum_{m \geq 1} u_m x^m$$

$(\text{id.})_k = 0$ pour $k \neq 0$ et $(\text{id.})_0(m) = 1$ pour tout $m \in N$.

2) $\varphi = x(d/dx)$, $\varphi_k = 0$ pour tout $k \neq 0$ et $\varphi_0(m) = m$; pour tout $u \in \hat{m}$

$$\varphi^{-1}\left(\sum_{m \geq 1} u_m x^m\right) = \sum_{m \geq 1} (u_m/m) x^m$$

donc, $(\varphi^{-1})_k = 0$ pour tout $k \neq 0$ et $(\varphi^{-1})_0(m) = 1/m \forall m \in N$.

3) Soit $a \in C[[x]]$, $a = \sum_{m \geq 0} a_m x^m$ et φ définie par

$$\varphi : \hat{m} \longrightarrow \hat{m}$$

$$u \rightsquigarrow a.u$$

$$a.u = \sum_{m=1} \left(\sum_{0 \leq k \leq m} a_k u_{m-k} \right) x^m; \quad \varphi_k(m-k) = a_k,$$

si $a \in C\{x\}$, alors φ est définie sur m et à valeurs dans m .

4) Soit $a \in m$ et

$$\varphi : m \longrightarrow m$$

$$u \rightsquigarrow a \circ u$$

il est facile de voir que φ n'est pas dans la classe $\mathcal{P}$.

Nous dirons qu'un opérateur $\varphi \in \mathcal{P}$ est un *bon opérateur* si pour tout $m \in N$ et tout k , $0 \leq k \leq m$,

$$|\varphi_k(m-k)| \leq c_k |\varphi_0(m-k)|$$

où la suite $\{c_k\}_{k \geq 0} \subset \mathbf{R}^+$ et telle qu'il existe $\rho > 0$ tel que

$$c(\rho) = \sum_{k \geq 0} c_k \rho^k < +\infty.$$

Exemples.

1) L'identité de $\hat{m}$ est un bon opérateur, il suffit de prendre $c_k = 0$ pour $k \neq 0$ et $c_0 = 1$ alors $c(\rho) = 1$.

2) Tout opérateur $\varphi \in \mathcal{P}$ tel que $\varphi_k = 0$ pour $k \neq 0$ est un bon opérateur $c(\rho) = 1$.

3) La multiplication par une série $a \in C\{x\}$ est un bon opérateur

$$\varphi(u) = a.u = \sum_{m \geq 1} \sum_{0 \leq k \leq m} (a_k u_{m-k}) x^m$$

$$|\varphi_k(m-k)| = |a_k| \leq c_k |a_0|$$

si $a_0 = 1$, on peut prendre $c_k = |a_k|$.

Soient $\varphi \in \mathcal{P}$ et $\psi \in \mathcal{P}$ nous dirons que φ domine ψ si pour tout m et tout $k \in [0, 1, \dots, m]$, il existe $d_k \in \mathbf{R}^+$ tel que

$$|\psi_k(m-k)| \leq d_k |\varphi_0(m-k)|$$

et il existe $\rho > 0$ tel que

$$\sum_{k \geq 0} d_k \rho^k < +\infty.$$

Un bon opérateur est donc un opérateur qui se domine.

Remarque. Si φ est un bon opérateur qui domine les opérateurs $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ alors pour tout m et tout $k \in [0, 1, 2, \dots, m]$, il existe $c_k \in \mathbf{R}^+$ tel que pour tout $j = 1, 2, \dots, n$

$$|\psi_{j,k}(m-k)| \leq c_k |\varphi_0(m-k)|$$

$$|\varphi_k(m-k)| \leq c_k |\varphi_0(m-k)|$$

avec

$$\sum_{k \geq 0} c_k \rho^k < +\infty \quad \text{pour un } \rho \in \mathbf{R}^+$$

Nous dirons qu'un opérateur $\varphi \in \mathcal{P}$ domine strictement un opérateur $\psi \in \mathcal{P}$ si

- 1°) φ domine ψ
- 2°) $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\psi_0(m)}{\varphi_0(m)} = 0$.

Exemples.

1°) Considérons $\theta = x(d/dx)$ alors $\theta_k = 0$ pour tout k sauf pour $k=0$, $\theta_0(m) = m$, considérons θ^p , on a $\theta_k^p = 0$ si $k \neq 0$ et $\theta_0^p(m) = m^p$. Donc pour tout p , θ^p est un bon opérateur qui domine strictement θ^q pour tout $q < p$.

2°) Si on considère $\varphi = \theta^{-1}$, on voit facilement que $(\theta^{-1})^p$ est un bon opérateur qui domine strictement $(\theta^{-1})^q$ pour tout $q > p$.

§ 2. Une classe d'opérateurs à singularité régulière

Soit $F(x, X_0, X_1, \dots, X_n; X'_1, X'_2, \dots, X'_N)$ une fonction holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^N$ et telle que $F(0; 0; 0) = 0$.

$$F(x, X; X') = \sum_{\beta + |\alpha| + |\alpha'| \geq 1} a_{\beta, \alpha, \alpha'} x^\beta X^\alpha X'^{\alpha'}$$

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n); \quad \alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_N);$$

$$F(x; X; X') = \sum_{p \geq 1} F_p(x; X; X')$$

où

$$F_p(x; X; X') = \sum_{\beta + |\alpha| + |\alpha'| = p} a_{\beta, \alpha, \alpha'} x^\beta X^\alpha X'^{\alpha'}.$$

Soit $\theta_0 = \text{id.}$, $\theta_1, \dots, \theta_n$; $\theta'_1, \dots, \theta'_N$ une suite d'opérateurs de $\mathcal{P}$ c'est à dire que si φ_j est un élément de cette suite on a pour tout $u \in \hat{m}$

$$\varphi_j(u) = \sum_{m \geq 1} \left(\sum_{0 \leq k \leq m-1} \varphi_{j,k}(m-k) u_{m-k} \right) x^m.$$

On considère dans la suite l'opérateur $\mathcal{P}$ -analytique

$$D: \hat{m} \longrightarrow \hat{m}$$

$$Du = F(x, \theta_0 u, \dots, \theta_n u; \theta'_1 u, \dots, \theta'_N u).$$

Soit q l'entier tel que $F_p \equiv 0$ pour tout $p < q$ et $F_q \not\equiv 0$ de plus supposons que $F_q(x, X, X')$ ne contient pas X' , c'est à dire que

$$F_q(x, X, X') = \sum_{\beta + |\alpha| = q} a_{\beta, \alpha} x^\beta X^\alpha \quad \text{où} \quad a_{\beta, \alpha} = a_{\beta, \alpha, 0}.$$

A l'opérateur D associons les $n+2$ polynômes:

$$C_q(D)(X) = \sum_{\beta + |\alpha| = q} a_{\beta, \alpha} (\theta_{0,0}(1))^{\alpha_0} \dots (\theta_{n,0}(1))^{\alpha_n} X^{|\alpha|}.$$

et pour $j=0, 1, \dots, n$;

$$C_{q,j}(D)(X) = \sum_{\beta + |\alpha| = q} a_{\beta, \alpha} \alpha_j (\theta_{0,0}(1))^{\alpha_0} \dots (\theta_{j,0}(1))^{\alpha_{j-1}}, \dots (\theta_{n,0}(1))^{\alpha_n} X^{|\alpha|-1}$$

Les hypothèses (H):

1°) parmi les opérateurs $\theta_0 = \text{id.}$, $\theta_1, \dots, \theta_n$ il y a un bon opérateur qui domine strictement les autres; notons le θ_{j_0}

2°) l'opérateur θ_{j_0} domine tous les opérateurs $\theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_N$

3°) les polynômes $C_q(D)(X)$ et $C_{q,j_0}(D)(X) \not\equiv 0$ n'ont pas de racine commune.

Remarque. La condition $C_{q,j_0}(D)(X) \not\equiv 0$ exprime que θ_{j_0} figure explicitement dans $F_q(x, u, \theta_1 u, \dots, \theta_n u)$.

Théorème 1. *Sous les hypothèses (H) toute solution formelle de l'équation*

$$Du = F(x, u, \theta_1 u, \dots, \theta_n u; \theta'_1 u, \dots, \theta'_N u) = 0$$

est convergente.

La démonstration se fait en deux étapes.

1°) *Existence d'une solution formelle.* L'équation $Du=0$ peut s'écrire

$$(1) \quad F_q(x, u, \theta_1 u, \dots, \theta_n u) = R_{q+1}(x, \theta_0 u, \dots, \theta_n u; \theta'_1 u, \dots, \theta'_N u)$$

où la série $R_{q+1}(x, X, X')$ ne contient que des monômes de degré total supérieur strictement à q . Introduisons dans l'équation (1) une série formelle

$$u = \sum_{m \geq 1} u_m x^m, \quad \theta_j u = \sum_{m \geq 1} \Theta_{j,m} x^m \quad \text{où} \quad \Theta_{j,m} = \sum_{0 \leq k \leq m-1} \theta_{j,k} (m-k) u_{m-k}$$

et

$$\theta'_j u = \sum_{m \geq 1} \Theta'_{j,m} x^m \quad \text{où} \quad \Theta'_{j,m} = \sum_{0 \leq k \leq m-1} \theta'_{j,k} (m-k) u_{m-k}.$$

Pour déterminer u_1 , nous obtenons l'équation:

$$C_q(D)(u_1) = \sum_{\beta + |\alpha| = q} a_{\beta, \alpha} (\theta_{0,0}(1))^{\alpha_0} \dots (\theta_{n,0}(1))^{\alpha_n} u_1^{|\alpha|} = 0$$

et pour tout $m > 1$, u_m est donné par

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta + |\alpha| = q} a_{\beta, \alpha} \sum_{j=0}^n \alpha_j \Theta_{j,m} (\Theta_{j,1})^{\alpha_j-1} \prod_{l \neq j} (\Theta_{l,1})^{\alpha_l} \\ & = G_m(\Theta_{0,1}, \Theta_{0,2}, \dots, \Theta_{0,m-1}; \theta_{1,1}, \dots, \theta_{1,m-1}; \dots \\ & \quad \theta_{n,1}, \dots, \theta_{n,m-1}; \theta'_{1,1}, \dots, \theta'_{1,m-1}; \dots \\ & \quad \theta'_{N,1}, \theta'_{N,2}, \dots, \theta'_{N,m-1}; (a)) \end{aligned}$$

où G_m est un polynôme en toutes les variables qui y figurent et où (a) désigne la suite des coefficients de la série R_{q+1} . Cette équation nous donne,

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{\substack{\beta + |\alpha| = q \\ |\alpha| \neq 0}} a_{\beta, \alpha} \sum_{j=0}^n \alpha_j \theta_{j,0}(m) (\theta_{j,0}(1))^{\alpha_j-1} \prod_{l \neq j} (\theta_{l,0}(1))^{\alpha_l} u_1^{|\alpha|-1} \right] u_m \\ & + \sum_{\beta + |\alpha| = q} a_{\beta, \alpha} \sum_{j=0}^n \alpha_j \left(\sum_{1 \leq k \leq m-1} \theta_{j,k} (m-k) u_{m-k} \right) (\theta_{j,0}(1))^{\alpha_j-1} \prod_{l \neq j} (\theta_{l,0}(1))^{\alpha_l} u_1^{|\alpha|-1} \\ & = f_m(u_1, \dots, u_{m-1}; \theta_{1,0}(1)u_1, \theta_{1,0}(2)u_2 + \theta_{1,1}(1)u_1, \dots, \\ & \quad \theta_{1,0}(m-1)u_{m-1} + \theta_{1,1}(m-2)u_{m-2} + \dots + \theta_{1,m-1}(1)u_1; \dots; \\ & \quad \theta_{n,0}(1)u_1, \theta_{n,0}(2)u_2 + \theta_{n,1}(1)u_1, \dots, \theta_{n,0}(m-1)u_{m-1} + \dots + \theta_{n,m-1}(1)u_1; \\ & \quad \theta'_{1,0}(1)u_1, \dots, \theta'_{1,0}(m-1)u_{m-1} + \dots + \theta'_{1,m-1}(1)u_1; \dots; \\ & \quad \theta'_{N,0}(1)u_1, \dots, \theta'_{N,0}(m-1)u_{m-1} + \dots + \theta'_{N,m-1}(1)u_1; (a)). \end{aligned}$$

Introduisons

$$F_{q,m}(X) = \sum_{\substack{\beta + |\alpha| = q \\ |\alpha| \neq 0}} a_{\beta, \alpha} \sum_{j=0}^n \alpha_j \theta_{j,0}(m) (\theta_{j,0}(1))^{\alpha_j-1} \prod_{l \neq j} (\theta_{l,0}(1))^{\alpha_l} u_l^{|\alpha|-1}.$$

Nous pouvons donc en conclure que pour toute racine u_1 de $C_q(D)(X)$ vérifiant

$F_{q,m}(u_1) \neq 0$ pour tout m , l'équation $Du=0$ admet une solution formelle. Par contre $F_{q,m}(u_1)=0$ pour certains m n'exclut pas l'existence d'une solution formelle.

2°) *Convergence des solutions formelles.* Parmi les opérateurs $\theta_0 = \text{id.}, \theta_1, \dots, \theta_n$ il y a un bon opérateur qui domine strictement les autres. Sans unire à la généralité on peut supposer que cet opérateur est θ_n , les deux polynômes $C_q(D)(X)$ et $C_{q,n}(D)(X)$ n'ont donc pas de racine commune et de plus $C_{q,n}(D)(X) \neq 0$. Comme θ_n domine l'identité

$$1 \leq c_{0|}^0 \theta_{n,0}(m), \quad c_0^0 \neq 0$$

quitte à normaliser θ_n on peut supposer $c_0^0 = 1$.

Nous avons:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{F_{q,m}(u_1)}{\theta_{n,0}(m)} \right\} &= \sum_{\beta + |\alpha| = q} a_{\beta,\alpha} \alpha_n (\theta_{n,0}(1))^{\alpha_n - 1} \prod_{1 \neq n} (\theta_{l,0}(1))^{\alpha_l} u_l^{|\alpha| - 1} \\ &= C_{q,n}(D)(u_1) \neq 0. \end{aligned}$$

Donc pour $m \geq M$,

$$|F_{q,m}(u_1)| \geq \sigma |\theta_{n,0}(m)|$$

et si $F_{q,m}(u_l) \neq 0$ pour tout $m < M$, il existe σ tel que

$$|F_{q,m}(u_l)| \geq \sigma |\theta_{n,0}(m)| \quad \text{pour tout } m.$$

Remarque. S'il existe des entiers $m < M$, tels que $F_{q,m}(u_1) = 0$ et si l'équation $Du=0$ admet une solution formelle, on peut voir que la suite de la démonstration reste valable et qu'il suffit de modifier un nombre fini de termes dans une série convergente. Le théorème reste donc encore valable dans ce cas.

L'opérateur θ_n domine les opérateurs $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n, \theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_N$. Donc pour tout m ,

pour $j=0, 1, \dots, n$

$$|\theta_{j,k}(m-k)| \leq c_k^j |\theta_{n,0}(m-k)| \quad \forall k, \quad 0 \leq k \leq m$$

pour $j=0, 1, 2, \dots, N$

$$|\theta'_{j,k}(m-k)| \leq c_k'^j |\theta_{n,0}(m-k)| \quad \forall k, \quad 0 \leq k \leq m$$

et il existe $\rho > 0$ tel que

$$c^j(\rho) = \sum_{k \geq 0} c_k^j \rho^k < +\infty$$

$$c'^j(\rho) = \sum_{k \geq 0} c_k'^j \rho^k < +\infty.$$

Rappelons que $c^0(\rho) = 1$.

Introduisons pour tout $j=0, 1, \dots, n$ et tout $r=1, 2, \dots, N$ les séries convergentes pour $|x| < \rho$

$$c^j(x) = \sum_{k \geq 0} c_k^j x^k, \quad c^0(x) = 1; \quad c'^j(x) = \sum_{k \geq 0} c_k'^j x^k$$

et considérons l'équation

$$\begin{aligned} \sigma_1 x^{q-1} Y = \mu x^q + \sum_{\substack{\beta + |\alpha| = q \\ |\alpha| \neq 0}} |a_{\beta, \alpha}| x^{q-|\alpha|} \prod_{j=0}^n (c^j(x) Y)^{\alpha_j} \\ + |R_{q+1}|(x, Y; c^1(x) Y; \dots; c^n(x) Y; c'^1(x) Y, \dots; c'^N(x) Y; (|a|)) \end{aligned}$$

où σ_1 et μ sont des nombres réels et où $|R_{q+1}|$ désigne une série majorante convergente de R_{q+1} . En posant $Y = xZ$ on voit immédiatement à l'aide du théorème des fonctions implicites que cette équation admet une solution

$$Y = \sum_{m \geq 1} Y_m x^m$$

convergente dans un disque centré à l'origine de $\mathbb{C}$. Nous allons montrer maintenant que si σ_1 et μ sont convenablement choisis Y est une série majorante de la série $\sum_{m \geq 1} u_m x^m$. Déterminons les coefficients Y_m de la série solution de l'équation ci-dessus.

$$\sigma_1 Y_1 = \mu + \sum_{\beta + |\alpha| = q} |a_{\beta, \alpha}| \prod_{j=0}^n (c_0^j Y_1)^{\alpha_j}$$

et pour tout $m > 1$,

$$\begin{aligned} \left[\sigma_1 - \sum_{\beta + |\alpha| = q} |a_{\beta, \alpha}| |\alpha| \prod_{j=0}^n (c_0^j)^{\alpha_j} Y_1^{|\alpha|-1} \right] Y_m \\ = \sum_{\beta + |\alpha| = q} |a_{\beta, \alpha}| \sum_{j=0}^n \alpha_j \left(\sum_{1 \leq k \leq m-1} c_k^j Y_{m-k} \right) (c_0^j)^{\alpha_j-1} \prod_{l \neq j} (c_0^l)^{\alpha_l} Y_1^{|\alpha|-1} \\ + f_m^*(Y_1, Y_2, \dots, Y_{m-1}; c_0^1 Y_1, c_0^1 Y_2 + c_1^1 Y_1, \dots, \\ c_0^1 Y_{m-1} + c_1^1 Y_{m-2} + \dots + c_{m-1}^1 Y_1; \dots; c_0^n Y_1, c_0^n Y_2 + c_1^n Y_1, \dots, \\ c_0^n Y_{m-1} + \dots + c_{m-1}^n Y_1; c_0'^1 Y_1, c_0'^1 Y_2 + c_1'^1 Y_1, \dots; c_0'^N Y_1, \\ c_0'^N Y_2 + c_1'^N Y_1, \dots, c_0'^N Y_{m-1} + \dots + c_{m-1}'^N Y_1; (|a|)) \end{aligned}$$

où f_m^* s'obtient à partir de f_m en remplaçant les coefficients de la famille (a) par les majorants notés $(|a|)$. Nous allons montrer maintenant par récurrence sur m que

$$|u_m| \leq |\theta_{n,0}(m)| |u_m| \leq Y_m \quad \text{pour tout } m \geq 1.$$

Prenons Y_1 tel que

$$|u_1| \leq |\theta_{n,0}(1)| |u_1| \leq Y_1$$

σ_1 tel que

$$0 < \sigma_1 - \sum_{\beta + |\alpha| = q} a_{\beta, \alpha} |\alpha| \prod_{j=0}^n (c_0^j)^{\alpha_j} Y_1^{|\alpha|-1} < \sigma$$

et

$$\mu = \sigma_1 Y_1 - \sum_{\beta + |\alpha| = q} |a_{\beta, \alpha}| \prod_{j=0}^n (c_0^j Y_1)^{\alpha_j}.$$

Supposons que

$$|u_p| \leq |\theta_{n,0}(p)| |u_p| \leq Y_p \quad \text{pour tout } p \leq m \text{ et montrons}$$

que ceci est encore vrai pour $p = m$. Nous avons pour tout k , $0 < k \leq m-1$ et tout $j = 0, 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} |\theta_{j,k}(m-k)u_{m-k}| &\leq |\theta_{j,k}(m-k)| |u_{m-k}| \\ &\leq c_k^j |\theta_{n,0}(m-k)| |u_{m-k}| \leq c_k^j Y_{m-k} \end{aligned}$$

tout $r = 1, 2, \dots, N$

$$\begin{aligned} |\theta'_{j,k}(m-k)u_{m-k}| &\leq |\theta'_{j,k}(m-k)| |u_{m-k}| \\ &< c_k'^j |\theta_{n,0}(m-k)| |u_{m-k}| \leq c_k'^j Y_{m-k}. \end{aligned}$$

En revenant à la formule donnant u_m , nous obtenons

$$\begin{aligned} |u_m| &\leq \frac{1}{|F_{q,m}(u_1)|} \left\{ \sum_{\beta + |\alpha| = q} |a_{\beta, \alpha}| \sum_{j=0}^n \alpha_j \sum_{1 \leq k \leq m-1} c_k^j Y_{m-k} (c_0^j)^{\alpha_j-1} \prod_{l \neq j} (c_0^l)^{\alpha_l} Y_l^{|\alpha|-1} \right. \\ &\quad + f_m^*(Y_1, Y_2, \dots, Y_{m-1}; c_0^1 Y_1, c_0^1 Y_2 + c_1^1 Y_1, \dots; \dots \\ &\quad c_0^n Y_{m-1} + \dots + c_{m-1}^n Y_1; c_0'^1 Y_1, c_0'^1 Y_2 + c_1'^1 Y_1, \dots; c_0'^N Y_1, c_0'^N Y_2 \\ &\quad \left. + c_1'^N Y_1, \dots, c_0'^N Y_{m-1} + \dots + c_{m-1}'^N Y_1; (|\alpha|) \right\} \\ |u_m| &\leq \frac{1}{|F_{q,m}(u_1)|} \left[\sigma_1 - \sum_{\beta + |\alpha| = q} |a_{\beta, \alpha}| |\alpha| \sum_{j=0}^n (c_0^j)^{\alpha_j} Y_1^{|\alpha|-1} \right] Y_m \\ &\leq \frac{Y_m}{|\theta_{n,0}(m)|} \end{aligned}$$

car

$$\sigma_1 - \sum_{\beta + |\alpha| = q} |a_{\beta, \alpha}| |\alpha| \prod_{j=0}^n (c_0^j)^{\alpha_j} Y_1^{|\alpha|-1} < \sigma$$

et

$$|F_{q,m}(u_1)| \geq \sigma |\theta_{n,0}(m)|.$$

En définitive

$$|u_m| \leq |\theta_{n,0}(m)| |u_m| \leq Y_m$$

et également

pour $j=0, 1, 2, \dots, n-1$

$$|\theta_{j,0}(m)u_m| \leq |\theta_{j,0}(m)| |u_m| \leq c_0^j |\theta_{n,0}(m)| |u_m| < c_0^j Y_m,$$

pour $r=1, 2, \dots, N$

$$|\theta'_{r,0}(m)u_m| \leq c_0'^j Y_m.$$

Ce qui prouve la convergence de la série $\sum_{m \geq 1} u_m x^m$ et donc le théorème 1. Il est d'ailleurs facile de voir que toutes les séries $\theta_j(u)$ pour $j=0, 1, \dots, n$ et $\theta'_j(u)$ pour $j=1, 2, \dots, N$ sont également convergentes.

Corollaire 1. Si parmi les opérateurs $\theta_0 = \text{id.}, \theta_1, \dots, \theta_n$, il y a un bon opérateur θ_{j_0} qui domine strictement tous les autres et tel que $C_q(D)(X)$ et $C_{q,j_0}(D)(X)$ soient sans racine commune, l'opérateur

$$D_q(u) = \sum_{\substack{\beta + |\alpha| = q \\ |\alpha| \neq 0}} a_{\beta, \alpha} x^\beta u^{\alpha_0} (\theta_1 u)^{\alpha_1} \dots (\theta_n u)^{\alpha_n}$$

est à singularité régulière.

Remarque. Pour toute racine u_1 de $C_q(D)(X) = 0$ vérifiant $F_{q,m}(u_1) \neq 0$ pour tout m , l'équation $Du = 0$ admet une solution formelle de premier terme $u_1 x$ si de plus $C_{q,j_0}(D)(u_1) \neq 0$, cette solution formelle est convergente.

Exemples.

1. Soit $\theta_1 = x(d/dx)$ et pour tout $j=2, 3, \dots, n$, $\theta_j = (\theta_1)^j$. Considérons l'opérateur

$$Du = \sum_{|\alpha|=1} a_\alpha(x) u^{\alpha_0} (\theta_1 u)^{\alpha_1} \dots (\theta_1^n u)^{\alpha_n} \quad a_\alpha \in C\{x\}$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\begin{aligned} Du &= \sum_{i=0}^n b_i(x) (\theta_1)^i u \quad \text{où pour tout } i, b_i(x) \in C\{x\} \\ &= \sum_{i=0}^n b_i(0) (\theta_1)^i u + R_2(x, u, \theta_1 u, \dots, \theta_1^n u). \end{aligned}$$

L'opérateur $(\theta_1)^n$ est bon et domine strictement $(\theta_1)^q$ pour tout $q < n$ ainsi que l'identité.

$$C_1(D)(X) = \sum_{i=0}^n b_i(0) X, \quad C_{1,n}(D)(X) = b_n(0).$$

Si $b_n(0) \neq 0$ l'opérateur D est à singularité régulière, on retrouve ainsi le critère classique de L. Fuchs.

2. Soit $\theta_1 = (x(d/dx))^{-1}$ c'est à dire

$$\theta_1 \left(\sum_{m \geq 1} u_m x^m \right) = \sum_{m \geq 1} \frac{u_m}{m} x^m$$

prenons $\theta_j = (\theta_1)^j$ et considérons

$$\begin{aligned} Du &= \sum_{i=0}^n b_i(x) (\theta_1)^i u \quad \text{où pour tout } i, b_i(x) \in C\{x\} \\ &= \sum_{i=0}^n b_i(0) (\theta_1)^i u + R_2(x, u, \theta_1 u, \dots, \theta_1^n u). \end{aligned}$$

L'identité est un bon opérateur qui domine strictement tous les autres,

$$C_1(D)(X) = \sum_{i=0}^n b_i(0) X, \quad C_{1,0}(D)(X) = b_0(0).$$

Donc si $b_0(0) \neq 0$ l'opérateur D est à singularité régulière.

§ 3. Applications aux équations différentielles

Considérons le bon opérateur

$$\theta: C\{x\} \longrightarrow \mathfrak{m}$$

$$u = \sum_{m \geq 1} u_m x^m \quad u = x \frac{du}{dx} = \sum_{m \geq 1} m u_m x^m$$

et un opérateur $\mathcal{L}_0$ -analytique

$$Du = F(x, u, \theta u, \dots, \theta^n u)$$

où

$$\begin{aligned} F(x, X_0, X_1, \dots, X_n) &= \sum_{p \geq 1} F_p(x, X_0, X_1, \dots, X_n) \\ F_p(x, X_0, X_1, \dots, X_n) &= \sum_{\beta + |\alpha| = p} a_{\beta\alpha} x^\beta X_0^{\alpha_0} \dots X_n^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Soit q l'entier tel que

$$F_p \equiv 0 \quad \text{pour } p < q \quad \text{et } F_q \equiv 0.$$

Comme pour tout $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\theta^j u = \sum_{m \geq 1} m^j u_m x^m$, on sait que θ^n domine strictement tous les autres opérateurs θ^j . Introduisons,

$$C(D)(X) = \sum_{\beta + |\alpha| = q} a_{\beta\alpha} X^{|\alpha|}, \quad C_n(D)(X) = \sum_{\beta + |\alpha| = q} a_{\beta\alpha} \alpha_n X^{|\alpha| - 1}$$

et

$$F_{q,m}(X) = \sum_{\beta + |\alpha| = q} a_{\beta\alpha} \sum_{j=0}^n \alpha_j m^j X^{|\alpha|-1}.$$

Le théorème 1 nous donne alors,

Théorème 2. *Pour tout racine u_1 de $C(D)(X)$ vérifiant $C_n(D)(u_1) \neq 0$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $F_{m,q}(u_1) \neq 0$, il existe une solution holomorphe*

$$u = \sum_{m \geq 1} u_m x^m$$

de $Du = 0$.

Et également

Théorème 3. *Si $C(D)(X)$ et $C_n(D)(X) \neq 0$ sont sans racine commune, les opérateurs*

$$D_q u = F_q(x, u, \theta u, \dots, \theta^n u)$$

et

$$Du = F(x, u, \theta u, \dots, \theta^n u)$$

sont à singularité régulière.

3.1. Quelques cas particuliers

1. Considérons un opérateur de la forme

$$Du = \sum_{i=0}^n a_i(x, u) \theta^{n-i} u$$

où les fonctions $a_i(x, u)$ sont holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^2$.

$$C(D)(X) = \left(\sum_{i=0}^n a_i(0, 0) \right) X, \quad C_n(D)(X) = a_0(0, 0);$$

donc si $a_0(0, 0) \neq 0$ l'opérateur D est à singularité régulière.

2. Considérons un opérateur de la forme

$$Du = \sum_{i=0}^n a_i(x, u) (\theta u)^{n-i}$$

où les fonctions $a_i(x, u)$ sont holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^2$.

$$a_i(x, u) = \sum_{q \geq 0} a_i^q(x, u), \quad a_i^q(x, u) = \sum_{\beta + \alpha_0 = q} a_{i, \beta \alpha_0} x^\beta u^{\alpha_0}.$$

Supposons que pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $a_i^p \equiv 0$ pour $p < i$ et $a_i^i \neq 0$. Donc

$$\begin{aligned} Du = D_n u = & u_{000} (\theta u)^n + (a_{110} x + a_{101} u) (\theta u)^{n-1} + \dots \\ & + \left(\sum_{\beta + \alpha_0 = j} a_{j \beta \alpha_0} u^{\beta} u^{\alpha_0} \right) (\theta u)^{n-j} + \dots + \sum_{\beta + \alpha_0 = n} a_{n \beta \alpha_0} x^\beta u^{\alpha_0} \end{aligned}$$

et

$$C(D)(X) = a_{000}X^n + (a_{110} + a_{101}X)X^{n-1} + \dots \\ + \left(\sum_{\beta + \alpha_0 = j} a_{j\beta\alpha_0} X^0 \right) X^{n-j} + \dots + \sum_{\beta + \alpha_0 = n} a_{n\beta\alpha_0} X^0.$$

L'opérateur θ domine strictement l'identité,

$$C_\theta(D)(X) = na_{000}X^{n-1} + (n-1)(a_{110} + u_{101}X)X^{n-2} + \dots \\ + \left(\sum_{\beta + \alpha_0 = j} (n-j)a_{j\beta\alpha_0} X^0 \right) X^{n-j-1} + \dots + \sum_{\beta + \alpha_0 = n-1} a_{n-1\beta\alpha_0} X^0.$$

Si $C(D)(X)$ et $C_\theta(D)(X)$ n'ont pas de racine commune l'opérateur D est à singularité régulière.

Remarque. Si par exemple la valuation de a_0 est supérieure ou égale à un, il est suffisant de considérer l'opérateur

$$D_n u = (a_{110}x + a_{101}u)(\theta u)^{n-1} + \dots + \sum_{\beta + \alpha_0 = j} a_{j\beta\alpha_0} x^\beta u^{\alpha_0} (\theta u)^{n-j} \\ + \dots + \sum_{\beta + \alpha_0 = n} a_{n\beta\alpha_0} x^\beta u^{\alpha_0}$$

car dans ce cas $a_0(x, u)(\theta u)^n$ est d'ordre supérieur à n et peut donc être considéré comme perturbation au sens du théorème 1 du § 2.

3.2. Un theoreme de P. Bungartz [1]

Nous allons en donner la version originale en citant des extraits de cet article ce qui nous paraît plus simple que de longues explications.

“In der üblichen Bewertung von $C[[z, w, w', \dots, w^{(l)}]]$ hat jede Variable die Ordnung 1. Statt dessen normieren wir die Bewertung ν folgendermassen: $\nu(z) := 1$, $\nu(w) := n$, $\nu(w') := n-1$, $\dots$, $\nu(w^{(l)}) := n-l$, $\dots$, $\nu(w^{(n-l)}) := l$, $\nu(zw^{(n)}) := 1$, $\nu(a) := 0$ für $a \in C$, also gleich so, wie wenn für $w, w', \dots, w^{(n-1)}, zw^{(n)}$ die Potenzreihen $w(z) = c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots$ und ihre Abteilungen bis zur n -ten Ordnung in $P^*(z, w, w', \dots, w^{(l)}, \dots, zw^{(n)})$ substituiert werden.

Jedes Potenzprodukt $z^{\alpha_0} w^{\alpha_1} (w')^{\alpha_2} \dots (w^{(l)})^{\alpha_{l+1}} \dots (zw^{(n)})^{\alpha_{n+1}}$ ($\alpha_i \geq 0$, ganz) hat damit die wohlbestimmte Ordnung

$$\nu(z^{\alpha_0} w^{\alpha_1} (w')^{\alpha_2} \dots (w^{(l)})^{\alpha_{l+1}} \dots (zw^{(n)})^{\alpha_{n+1}}) \\ = \alpha_0 + n\alpha_1 + (n-1)\alpha_2 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1}$$

und schreibt man $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$, $|\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_{n+1}$,

$$P(z, w, w', \dots, zw^{(n)}) = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha z^{\alpha_0} w^{\alpha_1} (w')^{\alpha_2} \dots (zw^{(n)})^{\alpha_{n+1}}$$

so für $P=0$

$$\nu(P) = \min_{|\alpha| \geq 0, c_\alpha \neq 0} (\alpha_0 + n\alpha_1 + (n-1)\alpha_2 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1})$$

und $\nu(P) := \infty$ für $P \equiv 0$.

Definition. Wir bezeichnen diese Bewertung ν als n -Ordnung von $C[[z, w, w', \dots, w^{(l)}]]$ und schreiben $n\text{-ord. } P = \nu(P)$.

Satz 1 (p. 19 [1]). Für die Funktion $w(z)$ der komplexen Veränderlichen z sei folgende Differentialgleichung $Q + R = 0$ von Typ (M, n) vorgelegt:

$$(2.1) \quad \lambda z^M + \sum_{\substack{\beta_0 + n\alpha_0 + (n-1)\alpha_1 + \dots + \alpha_n = M \\ |\alpha| \neq 0}} \lambda_{\beta_0 \alpha} z^{\beta_0} w^{\alpha_0} (w')^{\alpha_1} \dots (zw^{(n)})^{\alpha_n} \\ + R(z, w, w', \dots, w^{(l)}, \dots, zw^{(n)}) = 0$$

mit $M \geq 1, n \geq 1, \beta_0 \geq 0, \alpha_i \geq 0$ ganze Zahlen, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$. R sei konvergente Potenzreihe in der angeschriebenen Variablen mit $n\text{-ord. } R > M$. Für eine Nullstelle c_n von

$$(2.2) \quad \lambda + \sum_{\substack{\beta_0 + n\alpha_0 + (n-1)\alpha_1 + \dots + \alpha_n = M \\ |\alpha| \neq 0}} \lambda_{\beta_0 \alpha} c_n^{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n} n^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \\ (n-1)^{\alpha_2 + \dots + \alpha_n} + \dots + (n-l+1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \dots (1)^n = 0$$

sei für alle $N > n, N \in \mathbb{N}$, mit der Abkürzungen

$$c_{n+k}^{(0)} := c_{n+k}, \\ c_{n+k}^{(j)} := (n+k)(n+k-1) \dots (n+k-j+1) c_{n+k}^{(0)} \\ (k=0, 1, 2, \dots, j=1, 2, \dots, n)$$

$$(2.3) \quad \sum_{\substack{\beta_0 + n\alpha_0 + (n-1)\alpha_1 + \dots + \alpha_n = M \\ |\alpha| \neq 0}} \lambda_{\beta_0 \alpha} \left\{ \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu (c_n^{(\nu)})^{\alpha_\nu - 1} \prod_{\mu \neq \nu} (c_n^{(\mu)})^{\alpha_\mu} N(N-1) \dots (N-\nu+1) \right\} \neq 0.$$

Ferner werde gefordert, dass der Koeffizient der höchsten Potenz von N in (2.3) ungleich Null sei, also gelte:

$$(2.4) \quad \sum_{\beta_0 + n\alpha_0 + (n-1)\alpha_1 + \dots + \alpha_n = M} \lambda_{\beta_0 \alpha} \alpha_n (c_n^{(n)})^{\alpha_n - 1} \prod_{\mu \neq n} (c_n^{(\mu)})^{\alpha_\mu} \neq 0.$$

Dann gibt es zu diesem c_n genau eine konvergente Lösung

$$w(z) = c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots,$$

der obigen Differentialgleichung (2.1)."

Ce théorème qui est à l'origine de cet article va donc tout naturellement être une conséquence du théorème 1 sous sa version équations différentielles. En effet faisons dans l'équation (2.1) le changement de fonction inconnue $w = z^{n-1}u$, $\theta = z(d/dz)$ nous

avons; $w' = z^{n-2}[(n-1)u + \theta u]$, $w'' = z^{n-3}[(n-2)(n-1)u + \theta^2 u + \theta u]$ et plus généralement $w^{(l)} = z^{n-1-l} \mathcal{L}_{(l)}(u, \theta u, \dots, \theta^l u)$ ($l=1, 2, \dots, n-1$) où $\mathcal{L}_{(l)}$ est une forme linéaire en $u, \theta u, \dots, \theta^l u$. De même $zw^{(n)} = \mathcal{L}_{(n)}(u, \theta u, \dots, \theta^n u)$. Par ce changement de fonction inconnue l'équation (2.1) prend la forme

$$\lambda z^M + \sum_{\sigma + |\alpha| = M} a_{\sigma\alpha} z^\sigma u^{\alpha_0} (\theta u)^{\alpha_1} \dots (\theta^n u)^{\alpha_n} + R_M(z, u, \theta u, \dots, \theta^n u)$$

où R_M est de valuation habituelle supérieure strictement à M .

Désignons par D l'opérateur que nous venons d'obtenir. Si on introduit dans cet opérateur une série formelle $u = \sum_{m \geq 1} u_m x^m$, on voit facilement que l'équation (2.2) n'est autre que $C_M(u_1) = 0$, que (2.3) exprime $F_{M,m}(u_1) \neq 0$, c'est à dire assure l'existence d'une solution formelle et enfin (2.4) que $C_n(D)(u_1) \neq 0$, c'est à dire la condition assurant la convergence de cette solution formelle.

3.3 Les théorèmes a la Briot-Bouquet

Parmi ces théorèmes il y a le classique et les diverses généralisations. Nous allons voir qu'ils sont tous des conséquences de la version équations différentielles du théorème 1 ainsi que du théorème de P. Bungartz.

Théorème de Briot-Bouquet. [2] Soit l'équation différentielle

$$x \frac{dy}{dx} = ay + bx + R_2(x, y)$$

où $R_2(x, y)$ est une série convergente au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ dont la valuation est supérieure ou égale à 2. Si $a \notin \mathbb{N}$ et $a \neq 0$ alors cette équation admet une solution holomorphe à l'origine, $\varphi(x)$ telle que $\varphi(0) = 0$. C'est une conséquence immédiate du théorème 2 mais on peut dire de plus que l'opérateur

$$Du = x \frac{du}{dx} - au - bx - R_2(x, u)$$

est à singularité régulière.

Regardons maintenant une généralisation de ce théorème due à L. Reich [3], en version originale il s'énonce:

Satz. Seien m, n, r, s , ganze Zahlen, $m \geq 1, n \geq 1, s \geq 1, r \geq 0, s \leq n$. Es sei vorgelegt die Differentialgleichung

$$(3) \quad z^{(m-1)n+r+s} \frac{d^s w}{dz^s} = \lambda_0 z^r w^m + \lambda_1 z^{r+n} w^{n-1} + \dots + \lambda_m z^{mn+r} + P(z, w)$$

wobei gilt:

1) In der in einer Umgebung von $z=0, w=0$ konvergenten Potenzreihe $P(z, w)$ treten nur hinreichend hohe Potenzprodukte $w^u z^v$ auf, d.h. mit $v+un > mn+r$.

2) Für eine Nullstelle c_n der Gleichung

$$(4) \quad n(n-1) \cdots (n-s+1)c_n - \lambda_0 c_n^m - \lambda_1 c_n^{m-1} - \cdots - \lambda_m = 0$$

sei für alle $N \in \mathbb{N}, N > n$,

$$(5) \quad N(N-1) \cdots (N-s+1) - m\lambda_0 c_n^{m-1} - \cdots - \lambda_m \neq 0.$$

Dann existiert genau eine holomorphes Integral

$$(6) \quad w(z) = c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \cdots$$

der gegebene Differentialgleichung.

Ce théorème est également une conséquence immédiate du théorème 2. La vérification en est laissée au lecteur.

3.4. Comparaison avec les critères classiques de singularité régulière pour les équations linéaires

Nous allons voir que les conditions données dans le théorème 2 sont exactement les généralisations des critères classiques de singularité régulière pour les équations différentielles linéaires. Rappelons le plus ancien, considérons l'opérateur

$$Du = \sum_{i=0}^n a_i(x) \frac{d^{n-i}u}{dx^{n-i}} \quad a_i(x) \in \mathbb{C}\{x\}, \quad a_0(x) \neq 0.$$

Critère de L. Fuchs. [4]. Pour que l'origine soit une singularité régulière de D il faut et il suffit que

$$\forall \quad i=1, 2, \dots, n \quad \frac{a_i(x)}{a_0(x)} = x^{-i} q_i(x) \quad \text{avec} \quad q_i \in \mathbb{C}\{x\}.$$

Un tel opérateur à singularité régulière peut s'écrire sous la forme

$$Du = \sum_{i=0}^n b_i(x) x^{n-i} \frac{d^{n-i}u}{dx^{n-i}}$$

et la condition ci-dessus s'exprime par $b_0(0) \neq 0$. C'est à dire en introduisant $\theta = x(d/dx)$

$$Du = \sum_{i=0}^n c_i(x) \theta^{n-i} u \quad \text{où pour tout } i, \quad c_i(x) \in \mathbb{C}\{x\}, \quad c_0(x) \neq 0$$

et la condition de L. Fuchs s'exprime par $c_0(0) \neq 0$. La forme la plus intéressante du critère de Fuchs est celle qui est donnée dans l'ouvrage de E. L. Ince (p. 160) [5].

Soit $\varphi(x) \in \mathbb{C}[[x]]$, $\varphi(0) \neq 0$, on détermine le coefficient $P(r)$ du terme de plus bas degré dans la série

$$x^{-r}D(x^r\varphi(x))$$

ce coefficient est un polynôme en r .

Critère de E. L. Ince I [5]. L'origine est une singularité régulière pour D si et seulement si

$$d^0P(r) = n = \text{ordre de } D.$$

Et la forme qui se généralise au cas non linéaire est la suivante: soit $f(x) \in \hat{\mathbb{R}}[[x]]$, pour déterminer $\varphi(x) \in \hat{\mathbb{R}}[[x]]$ vérifiant $D\varphi = f(x)$, nous obtenons pour le calcul des coefficients φ_q ($q > 1$) de la série formelle φ des équations de la forme

$$Q(q)\varphi_q = F_q(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{q-1})$$

où $Q(q)$ est un polynôme en q de degré inférieur ou égal à n .

Critère E. L. Ince I'. L'opérateur D est à singularité régulière si et seulement si

$$d^0Q(q) = n = \text{ord.}(D).$$

Comparons ce critère aux hypothèses du théorème 2

$$Du = \sum_{i=0}^n c_i(x)\theta^{n-i}u$$

introduisons une série formelle $u = \sum_{q \geq 1} u_q x^q$ dans l'équation

$$Du = f(x),$$

nous obtenons

$$\left(\sum_{i=0}^n c_i(0) \right) u_1 = f_1$$

et pour $q > 1$,

$$\begin{aligned} Q(q)u_q &= (c_0(0)q^n + c_1(0)q^{n-1} + \dots + c_n(0))u_q \\ &= F_q(u_1, u_2, \dots, u_{q-1}) \end{aligned}$$

$$C_1(D)(X) = \left(\sum_{i=0}^n c_i(0) \right) X - f_1$$

$$C_{1,n}(D)(X) = c_0(0).$$

On a donc équivalence entre les conditions

- (I): $c_0(0)=0$,
 (II): $d^0q(q)=n=\text{ord. } D$,
 (III): $C_1(D)(X)$ et $C_{1,n}(D)(X)$ n'ont pas de racine commune,
 (IV): D est à singularité régulière.

3.5. Applications aux équations différentielles à points critiques fixes du second ordre de P. Painlevé

Considérons l'équation VI du tableau de P. Painlevé,

$$(VI) \quad y'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x} \right) y'^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x} \right) y' \\ + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2} \left[\alpha + \beta \frac{x}{y^2} + \gamma \frac{(x-1)}{(y-1)^2} + \delta \frac{x(x-1)}{(y-x)^2} \right]$$

à laquelle nous associons l'opérateur

$$Dy = y'' - \frac{1}{2y(y-1)(y-x)} [(y-1)(y-x) + y(y-x) + y(y-1)] y'^2 \\ + \frac{1}{x(x-1)(y-x)} [(x-1)(y-x) + x(y-x) + x(x-1)] y' \\ - \frac{1}{x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x)} [\alpha y^2(y-1)^2(y-x)^2 + \beta x(y-1)^2(y-x)^2 \\ + \gamma(x-1)y^2(y-x)^2 + \delta x(x-1)y^2(y-1)^2].$$

On se propose d'étudier l'équation $Dy=f(x)$ au voisinage des points singuliers 0, 1, ∞ de l'équation VI. On sait que l'équation VI est invariante par les transformations

$$\xi = 1-x, \quad \eta = 1-y, \quad \beta = -\gamma', \quad \gamma = -\beta'$$

et

$$\xi = \frac{1}{x}, \quad \eta = \frac{y}{x}, \quad \gamma = \frac{1}{2} - \delta', \quad \delta = \frac{1}{2} - \gamma'$$

ce qui permet de se limiter à faire l'étude de VI au voisinage de $x=0$. Étudions donc l'équation

$$Dy=f(x) \quad \text{pour } f(x) \in C\{x\}.$$

Elle s'écrit:

$$(*) \quad 2x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x)y'' - x^2(x-1)^2y'^2[(y-1)(y-x) + y(y-x) + y(y-1)] \\ + 2xy'(x-1)y(y-1)[(x-1)(y-x) + x(y-x) + x(x-1)]$$

$$\begin{aligned}
& -2[\alpha y^2(y-1)^2(y-x)^2 + \beta x(y-1)^2(y-x)^2 + \gamma(x-1)y^2(y-x)^2 \\
& + \delta x(x-1)y^2(y-1)^2] \\
& = 2f(x)x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x).
\end{aligned}$$

On se propose de voir si $x=0$ est une singularité régulière. Pour cela posons $y=y_0+z$, $y_0 \in \mathbb{C}$, $z(0)=0$, $\theta z = x(dz/dx)$ et $x^2 z'' = \theta^2 z - \theta z$, on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
& 2(x-1)^2(y_0+z)(y_0+z-1)(y_0+z-x)(\theta^2 z - \theta z) - (\theta z)^2(x-1)^2 \\
& \times [(y_0+z-1)(y_0+z-x) + (y_0+z)(y_0+z-x) + (y_0+z)(y_0+z-1)] \\
& + 2\theta z(x-1)(y_0+z)(y_0+z-1)[(x-1)(y_0+z-x) + x(y_0+z-x) + x(x-1)] \\
& - 2[\alpha(y_0+z)^2(y_0+z-1)^2(y_0+z-x)^2 + \beta x(y_0+z-1)^2(y_0+z-x)^2 \\
& + \gamma(x-1)(y_0+z)^2(y_0+z-x)^2 + \delta x(x-1)(y_0+z)^2(y_0+z-1)^2] \\
& = 2f(x)x^2(x-1)^2(y_0+z)(y_0+z-1)(y_0+z-x).
\end{aligned}$$

Les valeurs acceptables pour y_0 sont données par

$$-2y_0^4[\alpha(y_0-1)^2 - \gamma] = 0.$$

Donc $y_0=0$ ou bien y_0 est donné par $\alpha(y_0-1)^2 = \gamma$.

1°) cas. y_0 vérifie $\alpha(y_0-1)^2 = \gamma$, $y_0 \neq 0$

$$\begin{aligned}
C_1(D)(X) &= 2y_0^3(y_0-1)\{X(1-2\alpha y_0^2) - (y_0-1)[\beta + \alpha y_0^2 - \delta]\} \\
C_{\theta^2}(D)(X) &= 2y_0^2(y_0-1).
\end{aligned}$$

Il en résulte que l'équation (*) admet dans le cas générique une solution holomorphe et une seule $\varphi(x)$ vérifiant

$$\varphi(0)=0, \quad \varphi'(0) = \frac{(y_0-1)[\beta + \alpha y_0^2 - \delta]}{1-2\alpha y_0^2}.$$

2°) cas. $y_0=0$, dans ce cas

$$\begin{aligned}
C_2(D)(X) &= X^2[-1-2(\beta-\delta)] + 4\beta X - 2\beta \\
C_{\theta^2}(D)(X) &= 2X(X-1).
\end{aligned}$$

Si $C_2(D)(1) = -1 + 2\delta \neq 0$, et $C_2(D)(0) = -2\beta \neq 0$ alors à chacune des racines X_1, X_2 de $C_2(D)(X)=0$ est associée une solution holomorphe φ_1 et φ_2 tels que:

$$\varphi_1(0)=0, \quad \varphi_1'(0)=X_1; \quad \varphi_2(0)=0, \quad \varphi_2'(0)=X_2.$$

3°) cas. Les divers cas particuliers non envisagés ci-dessus et dont l'étude est laissée au lecteur.

Conclusion. L'équation VI de P. Painlevé est à singularité régulière aux points 0, 1, ∞ .

On peut également vérifier que les équations III et V de P. Painlevé ont une singularité régulière en 0. Le théorème 2 ne permet pas de conclure à la nature de la singularité ∞ pour les équations I, II, III, IV et V de P. Painlevé, mais vu la manière dont se déduisent les équations V, IV, III, II et I de l'équation VI par confluence, il y a tout lieu de penser que l'infini est une singularité irrégulière pour ces équations.

Remarque. L'équation VI est équivalente au système [6]:

$$y' = \frac{1}{x(x-1)} [y(y-1)(y-x)z + \theta_0(y-1)(y-x) + \theta_1 y(y-x) + (\theta_x + 1)y(y-1)]$$

$$z' = \frac{-1}{x(x-1)} \left[\left(\frac{3}{2} y^2 - (x+1)y + \frac{1}{2} x \right) z^2 + (2(\theta_0 + \theta_1 + \theta_x + 1)y - (x+1)\theta_0 - x\theta_1 - \theta_x - 1)z + \frac{1}{2} ((\theta_0 + \theta_1 + \theta_x + 1)^2 - \theta_\infty^2) \right]$$

où les constantes $\theta_0, \theta_1, \theta_x, \theta_\infty$ sont données par

$$\alpha = \frac{1}{2}\theta_\infty^2, \quad \beta = -\frac{1}{2}\theta_0^2, \quad \gamma = \frac{1}{2}\theta_1^2, \quad \delta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\theta_x^2.$$

Sous cette forme on voit immédiatement en utilisant le théorème 2.3 page 252 de [7] que l'équation VI est à singularité régulière aux points 0, 1 et ∞ . Des remarques analogues sont valables pour les équations III et V au voisinage de l'origine de C .

References bibliographiques

- [1] Bungartz, P., *Über singuläre Stellen analytischer Differentialgleichungen mit holomorph einmündenden Integralen*, Bonner Mathematische Schriften, Bonn, 1969.
- [2] Briot et Bouquet, *Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles J. de l'Ecole Polytechnique*, T. 21, 36, 1856.
- [3] Reich, L., Holomorphe Integrale verallgemeinerter Briot-Bouquetscher Differentialgleichungen, Sitzungsber. d. Oesterr. Akad. d. Wiss. Math; Naturw. Klasse, Abt. II, **176** (1967), 439-463.
- [4] Fuchs, L., J. für Math., **66** (1866), p. 143; **68** (1868), p. 358.
- [5] Ince, E. L., *Ordinary differential equations*, Dover Publ. Inc., 1956, p. 160.
- [6] Okamoto, K., Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé, Japan J. Math., **5** (1) (1979).
- [7] Gérard, R. et Sibuya, Y., *Etude de certains systèmes de Pfaff avec singularité*, Lecture Notes in Math. 712, Springer Verlag, p. 131-288.

nuna adresu:
Institut de Recherche Mathématique
Avancée
Université Louis Pasteur
7 Rue René Descartes
67084 Strasbourg
France

(Ricevita la 9-an de julio, 1984)