Funkcialaj Ekvacioj, **26** (1983), 349–368

Lemmes de Hensel et Factorisation Formelle pour les Opérateurs aux Différences

Par

Anner DUVAL

(Université Louis Pasteur, France)

On donne ci-dessous pour un opérateur aux différences une factorisation formelle liée à la décomposition de son polygone de Newton. En travaillant avec l'opérateur $\delta=\tau-1$ (et non avec l'opérateur de translation τ comme le fait Praagman dans [5]) on retrouve une notion d'opérateur fuchsien caractérisable comme dans le cas différentiel par des propriétés des solutions formelles. Ce travil s'inspire beaucoup de celui de Malgrange [3] mais surtout de la méthode que développe Robba dans [7], dont on n'a souvent eu qu'à transposer les énoncés et/ou es démonstrations.

Au paragraphe 1 on établit les propriétés de la fonction de valuation dans un cadre non commutatif plus général que celui qui sert à l'étude des opérateurs différentiels.

Au paragraphe 2 on démontre, par des méthodes voisines de celles de Robba, un lemme de Hensel d'une part pour un opérateur en δ, d'autre part pour un opérateur en τ. Ces méthodes utilisent un système d'équations aux différences non linéaires et se prêtent probablement mieux que celles de Praagman (plus proches de celles de Malgrange dans le cas différentiel) à des recherches de développements asymptotiques et à d'éventuels prolongements Gevrey dans l'esprit de ce que fait Ramis ([6]).

Au paragraphe 3 enfin on établit l'existence et l' "unicité" d'une factorisation en produit d'opérateurs se déduisant par "changement de fonction" d'opérateurs fuchsiens.

Il m'est agréable de remercier J.P. Ramis pour l'aide et les encouragements que j'ai trouvés auprès de lui aussi souvent que je le souhaitais.

Notations et Définitions. On utilisera les notations suivantes:

K: corps valué ultramétrique complet (non nécessairement commutatif au § 1)

τ: isométrie de K, i.e., un automorphisme de K tel que $\forall a \in K$, $v(\tau(a))=v(a)$ où v est la valuation de K

δ: τ-dérivation, i.e., une application de K dans K telle que:

1) $\delta(a+b)=\delta(a)+\delta(b), \quad \forall a, b \in K$
2) $\delta(ab)=\tau(a)\delta(b)+\delta(a)b, \quad \forall a, b \in K.$

On appellera *degré* de δ le nombre:

$$\alpha(\delta)=\inf_{\substack{a\in K\\ a\neq 0}} v(\delta(a))-v(a).$$

On a: δ continue $\Leftrightarrow \alpha(\delta)>-\infty$.

Exemples. 1) A chaque isométrie τ et à chaque élément $c\in K$ on peut associer la *dérivation interne induite par* c: $\delta_c(a)=\tau(a)c-ca$ (Cohn [1]). Son degré vérifie la double inégalité: $v(c)\leq\alpha(\delta_c)\leq v(\tau(c)-c)$.

En particulier si $c=1$, $\delta_\tau=\tau-1$ est une dérivation dont le degré sera appelé *degré de* τ et noté $\alpha(\tau)$. Comme τ est une isométrie on a $\alpha(\tau)\geq 0$.

2) $K=k((1/x))$ (où k est un corps) muni de la valuation: si $a=\sum_{s\geq s_0} a_s(1/x^s)$ avec $a_{s_0}\neq 0$, $v(a)=s_0$
τ: opérateur de translation: $\tau(a(x))=a(x+1)$
L'opérateur δ_τ est alors l'opérateur aux différences: $\delta_\tau(a(x))=a(x+1)-a(x)$.
Dans ce cas $\alpha(\tau)=1=\alpha(\delta_\tau)$.

3) $K=k((1/X))$ τ_q=isométrie asssociée à l'opérateur aux q-différences: $\tau_q(a(x))=a(qx)$. Cette fois $\alpha(\tau_q)=0$. Remarquons que le changement de variable $x=q^t$ ramène τ_q à τ.

4) Lorsque K est commutatif, ou bien $\tau\neq$identité et les seules τ-dérivations sont les dérivations internes qui sont de la forme $c(\tau-1)$ avec $c\in K$ ou bien $\tau=$ identité et c'est le cas différentiel.

Dans $K[X]$, resp. $K[\tau]$, resp. $K[\delta]$ on définit une multiplication par: $Xa=aX$, $\forall a\in K$, resp. $\tau a=\tau(a)\tau$, resp. $\delta a=\tau(a)\delta+\delta(a)$. Avec ces définitions $K[X]$, $K[\tau]$ et $K[\delta]$ sont des anneaux euclidiens aussi bien pour la division à droite que pour la division à gauche (voir par ex. Cohn loc. cit.).

Pour $P\in K[X]$, resp. $K[\tau]$, resp. $K[\delta]$ et pour $t\in\bar{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ si $P=\sum a_iY^i$ ($Y=X$, resp. τ, resp. δ) on définit la *fonction de valuation* de P:

$$v(P,t)=\inf_i\{v(a_i)+it\}$$
$$v(0,t)=+\infty\,\forall t$$

On pose aussi: $N(P,t)=\sup\{i\mid v(a_i)+it=v(P,t)\}$
$n(P,t)=\inf\{i\mid v(a_i)+it=v(P,t)\}$
$N(0,t)=n(0,t)=-\infty$.

§ 1. Propriétés de la fonction de valuation.

Rappelons sans démonstration (voir Robba [7]) les propriétés et les définitions suivantes:

1) La fonction $v(P,t)$ est continue, concave, affine par morceaux et sa dérivée à guache (resp. à droite) est $N(P,t)$ (resp. $n(P,t)$).

2) Si $N(P, t) \neq n(P, t)$ on dit que t est une *valeur exceptionnelle* pour P. Les valeurs exceptionnelles pour P sont en nombre fini.

3) Si K est commutatif et si K^{alg} désigne sa clôture algébrique,

$N(P, t)$ est le nombre de zéros de P dans K^{alg} de valuation $\geq t$,

$n(P, t)$ est le nombre ce zéros de P dans K^{alg} de valuation $> t$,

(donc $N(P, t) - n(P, t)$ est le nombre de zéros de P dans K^{alg} de valuation t).

4) Les valeurs exceptionnelles pour P sont les opposés des pentes des côtés de son polygone de Newton (frontière de l'enveloppe convexe supérieure des points $\{i, v(a_i) \in \bar{R}^2\}$.

Les propositions suivantes montrent sous quelles hypothèses la fonction de valuation se comporte comme dans le cas commutatif vis à vis des opérations: addition, multiplication, homothétie et translation.

Proposition 1.1. *Pour $P, Q \in K[Y]$ où $Y = X$, resp. τ, resp. δ et pour $t \in \bar{\boldsymbol{R}}$ on a: $v(P+Q, t) \geq \inf(v(P, t), v(Q, t))$ avec égalité si $v(P, t) \neq v(Q, t)$ ou si $N(P, t) \neq N(Q, t)$ ou si $n(P, t) \neq n(Q, t)$.*

Proposition 1.2. *Soient $P(X), Q(X) \in K[X]$ et $R(X) = P(X)Q(X)$.*

1) *Pour $t \in \bar{\boldsymbol{R}}$ on a $v(R, t) = v(P, t) + v(Q, t)$*
   $N(R, t) = N(P, t) + N(Q, t)$ et $n(R, t) = n(P, t) + n(Q, t)$.
2) i) *Pour $t \in \bar{\boldsymbol{R}}$ on a $v(R(\tau) - P(\tau)Q(\tau), t) \geq v(P, t) + v(Q, t) + \alpha(\tau)$.*
   ii) *Pour $t \leq \alpha(\delta)$ on a $v(R(\delta) - P(\delta)Q(\delta), t) \geq v(P, t) + v(Q, t) + \inf(\alpha(\tau), \alpha(\delta) - t)$.*
3) *Si $\alpha(\tau) \neq 0$,*
   i) *$v(P(\tau)Q(\tau), t) = v(P, t) + v(Q, t)$ et des égalités analogues pour N et n pour tout $t \in \bar{\boldsymbol{R}}$,*
   ii) *$v(P(\delta)Q(\delta), t) = v(P, t) + v(Q, t)$ pour $t \leq \alpha(\delta)$. Egalité analogue pour N si $t \leq \alpha(\delta)$ et pour n si $t < \alpha(\delta)$.*

Démonstration. 1) Si $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q(X) = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$ alors $R(X) = \sum_{i,j} a_i b_j X^{i+j} = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k$ avec $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

Supposons que t ne soit exceptionnel ni pour P, ni pour Q, alors il existe i_0 et j_0 tels que

$$v(P, t) = v(a_{i_0}) + i_0 t \quad \text{et} \quad \forall i \neq i_0 \quad v(a_i) + it > v(a_{i_0}) + i_0 t \tag{1}$$

$$v(Q, t) = v(b_{j_0}) + j_0 t \quad \text{et} \quad \forall j \neq j_0 \quad v(b_j) + jt > v(b_{j_0}) + j_0 t. \tag{2}$$

La proposition 1.1 donne

$$v(R, t) \geq \inf_{i,j}(v(a_i) + v(b_j) + (i+j)t) = \inf_i(v(a_i) + it) + \inf_j(v(b_j) + jt),$$

$$v(R, t) \geq v(a_{i_0}) + v(b_{j_0}) + (i_0 + j_0)t.$$

D'autre part $v(R, t)=\inf_k v(c_k)+kt\leq v(c_{i_0+j_0})+(i_0+j_0)t$. Or $c_{i_0+j_0}+\sum_{i+j=i_0+j_0} a_ib_j$ et dans cette somme pour les indices tels que $i\neq i_0$ donc $j\neq j_0$ les inégalités (1) et (2) entraînent:

$$v(a_i)+v(b_j)>v(a_{i_0})+v(b_{j_0}) \quad \text{donc} \quad v(c_{i_0+j_0})=v(a_{i_0})+v(b_{j_0})$$
$$\text{et} \quad v(R, t)\leq v(a_{i_0})+(b_{j_0})+(i_0+j_0)t.$$

Le résultat annoncé se déduit par continuité pour les valeurs exceptionnelles et par dérivation pour N et n.

2) i) et 3) i) On prend d'abord $P(X)=X^i$ et $Q(X)=a$. Alors $R(\tau)-P(\tau)Q(\tau)=a\tau^i-\tau^i a=(a-\tau^i(a))\tau^i$. On voit facilement par récurrence sur i que $v(a-\tau^i(a))\geq v(a)+\alpha(\tau)$ $\forall i \in N$. Donc $v(a\tau^i-\tau^i a, t)\geq v(a)+\alpha(\tau)+it=v(P, t)+v(Q, t)+\alpha(\tau)$. Si maintenant $P(X)=\sum a_iX^i$ et $Q(X)=\sum b_jX^j$ on aura

$$R(\tau)-P(\tau)Q(\tau)=\sum_{i,j}(a_ib_j\tau^{i+j}-a_i\tau^ib_j\tau^j)=\sum_{i,j}a_j(b_j\tau^i-\tau^ib_j)\tau^j.$$

Il est clair par définition que $\forall P \in K[\tau]$, $\forall a \in K$, $\forall j \in N$ et $\forall t \in \bar{\boldsymbol{R}}$

$$v(aP(\tau)\tau^j, t)=v(a)+jt+v(P, t).$$

La proposition 1.1 entraîne donc:

$$v(R(\tau)-P(\tau)Q(\tau), t)\geq\inf_{i,j} v(a_i)+jt+v(b_j)+\alpha(\tau)+it=v(P, t)+v(Q, t)+\alpha(\tau).$$

Comme on vient de voir que $v(R, t)=v(P, t)+v(Q, t)$ on déduit de cette inégalité et de la proposition 1.1 que si $\alpha(\tau)>0$ on a:

$$v(P(\tau)Q(\tau), t)=v(P(\tau)-Q(\tau)-R(\tau)+R(\tau), t)=v(R, t)=v(P, t)+v(Q, t).$$

2) ii) et 3) ii) On commence toujours par $P(X)=X^i$ et $Q(X)=a$. Il vient

$$R(\delta)-P(\delta)Q(\delta)=a\delta^i-\delta^ia=(a-\tau^i(a))\delta^i+\sum_{j=0}^{i-1}T_{i,j}(a)\delta^j,$$

où $T_{i,j}(a)$ est la somme de toutes les expressions de la forme:

$$\delta^{i}\circ\tau^{j}\circ\delta^{i_1}\tau^{j_1}\cdots(a) \quad \text{avec} \quad i_0+i_1+\cdots=i-j \quad \text{et} \quad j_0+j_1+\cdots=j.$$

Donc $v(T_{i,j}(a))\geq v(a)+(i-j)\alpha(\delta)$ et

$$v(a\delta^i-\delta^ia, t)\geq\inf\,(v(a)+\alpha(\tau)+it, \inf_{0\leq j\leq i-1} v(a)+(i-j)\alpha(\delta)+jt).$$

Lorsque $t\leq\alpha(\delta)$ il vient:

$$\begin{aligned}v(a\delta^i-\delta^ia, t)&\geq\inf\,(v(a)+\alpha(\tau)+it, v(a)+\alpha(\delta)+(i-1)t)\\&=v(a)+it+\inf\,(\alpha(\tau), \alpha(\delta)-t).\end{aligned}$$

Le reste de la démonstration est identique au cas de l'opérateur τ avec cette seule différence que pour n il faut pouvoir dériver à droite: il faut donc que $t<\alpha(\delta)$.

Proposition 1.3. *Pour $P(X) \in K[X]$ et pour $c \in K$ on pose $R(X)=P(cX)$ $(c\neq 0)$. Alors*

1) $\forall t \in \bar{\boldsymbol{R}}$, $v(R, t)=v(P(c\tau), t)=v(P, t+v(c))$,
2) $\forall t \in \bar{\boldsymbol{R}}$ *on a* $v(R(\delta)-P(c\delta), t)\geq v(P, t+v(c)) \inf(\alpha(\tau), \alpha(\delta)-t)$,
3) *si* $\alpha(\tau)\neq 0$ *on a pour* $t\leq\alpha(\delta)$:

$$v(P(c\delta), t)=v(P, t+v(c)).$$

Démonstration. 1) Si $P(X)=\sum a_i X^i$, $P(cX)=\sum a_i c^i X^i$ et l'affirmation relative à R est évidente. D'autre part $P(c\tau)=\sum a_i c\tau(c)\tau^2(c)\cdots\tau^{i-1}(c)\tau^i$ et, τ étant une isométrie, le résultat est encore cliar.

2) On commence par le cas $P(\delta)=\delta^i$ qu'on traite par récurrence sur i: pour $i=1$, $R(\delta)-P(c\delta)=0$ et c'est vérifié si $Q_i(\delta)=c^i\delta^i-(c\delta)^i$ alors

$$c\delta Q_i(\delta)=c\delta(c_i\delta^i)-(c\delta)^{i+1}=c[\tau(c^i)\delta^{i+1}+\delta(c^i)\delta^i]+Q_{i+1}(\delta)-c^{i+1}\delta^{i+1},$$

donc $Q_{i+1}(\delta)=c(c^i-\tau(c^i))\delta^{i+1}-c\delta(c^i)\delta^i+c\delta Q_i(\delta)$.

L'hypothèse de récurrence et la proposition 1.2 impliquent:

$$v(c\delta Q_i(\delta), t)\geq v(c)+t+i(t+v(c))+\inf(\alpha(\tau), \alpha(\delta)-t).$$

Comme d'autre part

$$\begin{aligned} &v(c(c^i-\tau(c^i))\delta^{i+1}-c\delta(c^i)\delta^i, t)\\ &\quad\geq\inf(v(c)+iv(c)+\alpha(\tau)+(i+1)t, v(c)+iv(c)+\alpha(\delta)+it)\\ &\quad=(i+1)(t+v(c))+\inf(\alpha(\tau), \alpha(\delta)-t),\end{aligned}$$

il en résulte:

$$v(Q_{i+1}(\delta))\geq(i+1)(t+v(c))+\inf(\alpha(\tau), \alpha(\delta)-t).$$

Ensuite si $P(X)=\sum a_i X^i$, on a $R(\delta)-P(c\delta)=\sum a_i Q_i(\delta)$ et le résultat se déduit de la proposition 1.1.

Le 3) se déduit du 2) comme dans la proposition précédente.

Proposition 1.4. *Soient $P \in K[X]$ et $b \in K$, on pose $T(X)=P(X+b)$.*

1) *Pour* $t\leq v(b)$ *on a* $v(T, t)=v(P, t)$.
2) *Pour* $t\leq v(b)$ *on a*
   i) $v(T(\tau)-P(\tau+b), t)\geq v(P, t)+v(b)+\alpha(\tau)-t$
   et ii) $v(T(\delta)-P(\delta+b), t)\geq v(P, t)+\inf(\alpha(\tau)+v(b), \alpha(\delta))-t)$.
3) i) *Si* $t\leq v(b)$ *on a* $v(P(\tau+b), t)=v(P, t)$.
   Si $\alpha(\tau)>0$ *on a de plus* $n(P(\tau+b), v(b))=n(T, v(b))$.

ii) *Si* $t \leq \inf(v(b), \alpha(\delta))$ *on a* $v(P(\delta+b), t) = v(P, t)$.
Si $\alpha(\tau) > 0$ *et si* $v(b) < \alpha(\delta)$ *on a* $n(P(\delta+b), v(b)) = n(T, v(b))$.

Démonstration. 1) Pour tout $c \in K$ et tour $P(X) = \sum_i a_i X^i \in K[X]$, désignons par $\mathscr{T}_c P$ le polynôme

$$P(X+c) = \sum_i a_i (X+c)^i = \sum_i a_i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} c^j X^{i-j}.$$

On a $T = \mathscr{T}_b P$ et $R = \mathscr{T}_{-b} T$.
Or les propositions 1.1 et 1.2 entraînent:

$$v(\mathscr{T}_c P, t) \geq \inf_i (v(a_i) + i \inf(v(c), t)).$$

Donc si $t \leq v(c)$ on a $v(\mathscr{T}_c P, t) \geq \inf_i v(a_i) + it = v(P, t)$.
On applique ce résultat à $c = b$ puis à $c = -b$ (et $t \leq v(b)$), il vient:

$$v(P, t) = v(\mathscr{T}_{-b} T, t) \geq v(T, t) = v(\mathscr{T}_b P, t) \geq v(P, t).$$

2) i) et 3) i) On le démontre d'abord pour $P(X) = X^i$ c'est-à-dire que par récurrence sur i, on montre que $v(Q_i(\tau), t) \geq it + v(b) + \alpha(\tau) - t$ où

$$Q_i(\tau) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} b^j \tau^{i-j} - (\tau+b)^i$$

pour $i = 0$, c'est vrai puisque $Q_0(\tau) = 0$. Comme

$$Q_i(\tau)(\tau+b) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} b^j (\tau^{i+1-j} + \tau^{i-j}(b)\tau^{i-j}) - (\tau+b)^{i+1},$$

on en tire

$$\begin{aligned} Q_{i+1}(\tau) &= Q_i(\tau)(\tau+b) + \sum_{j=1}^{i+1} \binom{i}{j-1} b^j \tau^{i+1-j} - \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} b^j \tau^{i-j}(b) \tau^{i-j} \\ &= Q_i(\tau)(\tau+b) + \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} b^j (b - \tau^{i-j}(b)) \tau^{i-j}. \end{aligned}$$

Les propositions 1.1 et 1.2 et l'hypothèse de récurrence donnent:

$$v(Q_{i+1}(\tau), t) \geq \inf(it + v(b) + \alpha(\tau) - t + \inf(v(b), t), \inf_{j=0,\cdot 1} (jv(b) + \alpha(\tau) + v(b) + (i-j)t)).$$

Si $t \leq v(b)$ l'inf en j est obtenu pour $j = 0$ et on a:

$$v(Q_{i+1}(\tau), t) \geq \inf(it + v(b) + \alpha(\tau), \alpha(\tau) + v(b) + it) = (i+1)t + v(b) + \alpha(\tau) - t.$$

On en déduit comme dans les propositions précédentes le cas général puis la première égalité du 3) i).

On tire d'autre part de 1) et de 2) i) que si $\alpha(\tau)>0$:

$$v(T(\tau)-P(\tau+b),\ v(b))>v(T,\ v(b)).$$

Par continuité cette relation reste vraie au voisinage de $v(b)$ et on a dans ce voisinage: $v(P(\tau+b),\ t)=v(T,\ t)$ ce qui entraîne l'égalité des dérivées à droite en $v(b)$.

2) ii) et 3) ii) Cette fois encore on prend $P(X)=X^i$ et on pose:

$$Q_i(\delta)=\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}b^j\delta^{i-j}-(\delta+b)^i$$

et on démontre le résultat par récurrence sur i: pour $i=0$, $Q_0(\delta)=0$ et c'est clair

$$\begin{aligned}Q_{i+1}(\delta)&=(\delta+b)Q_i(\delta)+\sum_{j=0}^{i+1}\binom{i+1}{j}b^j\delta^{i+1-j}-\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}[\tau(b^j)\delta^{i+1-j}+\delta(b^j)\delta^{i-j}+b^{j+1}\delta^{i-j}]\\&=(\delta+b)Q_i(\delta)+\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j+1}b^{j+1}\delta^{i-j}-\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}[\tau(b^j)\delta^{i+1-j}+\delta(b^j)\delta^{i-j}]\\&=(\delta+b)Q_i(\delta)+\sum_{j=0}^{i}\left[\binom{i}{j+1}(b^{j+1}-\tau(b^{j+1}))-\binom{i}{j}\delta(b^j)\right]\delta^{i-j}.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}&v(Q_{i+1}(\delta),\ t)\\&\quad\geq\inf\,(v(Q_i,\ t)+\inf\,(t,\ v(b)),\ \inf_{j=0,\cdots i}\ (i-j)t+\inf\,((j+1)v(b)+\alpha(\tau),\ jv(b)+\alpha(\delta)))\\&\quad=\inf\,(v(Q_i,\ t)+\inf\,(t,\ v(b)),\ \inf_j j(v(b)-t)+it+\inf\,(\alpha(\delta),\ v(b)+\alpha(\tau)).\end{aligned}$$

Si $t\leq v(b)$ l'inf est atteint pour $j=0$ et l'hypothèse de récurrence implique:)

$$v(Q_{i+1},\ t)\geq(i+1)t+\inf\,(\alpha(\tau)+v(b),\ \alpha(\delta))-t.$$

La suite est toujours la même: comme $\alpha(\tau)\geq 0$, $\inf\,(\alpha(\tau)+v(b),\ \alpha(\delta))>t$ dès que $t<\inf\,(\alpha(\delta),\ v(b))$. Enfin si $v(b)<\alpha(\delta)$ on peut reprendre au voisinage de $v(b)$ l'argument du cas i) qui donne l'égalité voulue pour n.

On utilisera parfois dans la suite les propositions 1.3 et 1.4 sous la forme du

Corollaire 1.5. *Supposons K commutatif et $\delta=c(\tau-1)$. Soient $\eta\in K$ et $P\in K[X]$. On pose $R(X)=P((1+\eta/c)X+\eta)$ et $S(\delta)=P((1+\eta/c)\delta+\eta)$. Alors*

1) *si $t+v(1+\eta/c)\leq v(\eta)$ on a $v(R,\ t)=v(P,\ t+v(1+\eta/c))$,*
2) *si $t\leq\alpha(\delta)$ et $t+v(1+\eta/c)\leq\inf(\alpha(\delta),\ v(\eta))$ on a: $v(S,\ t)=v(P,\ t+v(1+\eta/c))$,*
3) *si de plus $v(\eta)<\alpha(\delta)$ alors $n(S,\ v(\eta/1+\eta/c))=n(R,\ v(\eta/1+\eta/c))$.*

Remarques. 1) Il est facile de vérifier que le changement de fonction $y=bz$ dans l'équation $P(\tau)y=0$ conduit à l'équation $P((\tau(b)/b)\tau)z=0$ c'est-à-dire correspond à une homothétie $P(a\tau)$ dans $K[\tau]$ lorsque $a=\tau(b)/b$ appartient à K.

2) De même le changement $y=bz$ dans $P(\delta)$ correspond à la similitude: $P((\tau(b)/b)\delta+(\delta(b)/b))$ lorsque $\tau(b)/b$ et $\delta(b)/b$ appartiennent à K. Lorsque K est commutatif et $\delta=c(\tau-1)$ si $a=\delta(b)/b$ alors $\tau(b)/b=1+a/c$.

Pour $P\in K[\tau]$ (resp. $K[\delta]$) et $t\in\bar{\boldsymbol{R}}$ on dit que P est *t-dominant* si $N(P,t)=d^\circ P$ et que P est *t-extrêmal* si, de plus, $n(P,t)=0$. Autrement dit P est *t-dominant* s'il n'a pas de valeur exceptionnelle $<t$, *t-extrêmal* si sa seule valeur exceptionnelle est t. Dans le cas commutatif, on a encore: P est *t-dominant* si ses zéros dans K^{alg} sont de valuation $\geq t$, *t-extrêmal* si ses zéros dans K^{alg} sont de valuation t.

Une conséquence directe des propositions ci-dessus est la

Proposition 1.6. *Si $P\in K[\tau]$ (resp. $K[\delta]$) est t-dominant et si $\sigma(\tau)>0$ (resp. et si de plus $t\leq\alpha(\delta)$), si $A, Q, R, Q', R'\in K[\tau]$ (resp. $K[\delta]$) sont tels que:*

$$A=QP+R=PQ'+R' \quad \textit{avec} \quad d^\circ R<d^\circ P \quad \textit{et} \quad d^\circ R'<d^\circ P$$

alors
$$\inf(v(Q,t),\, v(Q',t))\geq v(A,t)-v(P,t),$$
$$\inf(v(R,t),\, v(R',t))\geq v(A,t).$$

Definition 1.7. On dira que $P\in K[\delta]$ est *fuchsien* s'il est $\alpha(\delta)$-dominant.

En recopiant les démonstrations de Robba (très proches de celles de Malgrange) on obtient les résultats suivants.

Lemme 1.8. *Soient $A, P, Q, P', Q'\in D=K[\tau]$ (resp, $K[\delta]$) tels que*

(i) $A=QP=P'Q'$

(ii) $d^\circ P=d^\circ P'$ (donc $d^\circ Q=d^\circ Q'$)

(iii) pour tous $P_1, Q_1\in D$, $d^\circ P_1<d^\circ P$ et $P_1Q'=Q_1P$ entraînent $P_1=Q_1=0$. Alors on a $D/DP\approx D/DP'$, $D/DQ\approx D/DQ'$ $D/DA\approx D/DP\oplus D/DQ$ (isomorphismes de D-modules à gauche).

Théorème 1.9. (Factorisation d'un polynôme suivant ses valeurs exceptionnelles).

Soient $A\in D=K[\tau]$ (resp, $K[\delta]$) et $t\in\boldsymbol{R}$, si $\alpha(\tau)>0$ (resp. et si $t\leq\alpha(\delta)$).

1) *Il existe $Q, P\in D$ avec P t-dominant, $d^\circ P=N(A,t)$ tels que $A=QP$.*
2) *(Unicité) Si $A=Q_1P_1$ avec les mêmes conditions, il existe $a\in K$, $a\neq 0$, tel que $Q_1=Qa^{-1}$ et $P_1=aP$.*
3) *Il existe Q' et $P'\in D$ avec P' t-dominant, $d^\circ P'=N(A,t)$ tels que $A=P'Q'$.*
4) *$D/DP\approx D/DP'$, $D/DQ\approx D/DQ'$, $D/DA\approx D/DP\oplus D/DQ$.*

Corollaire 1.10. *Soient $A\in D=K[\tau]$ (resp. $K[\delta]$) et $t\in\boldsymbol{R}$, si $\alpha(\tau)>0$ (resp. et si $t<\alpha(\delta)$) alors*

1) *il existe $Q, P\in D$ avec P t-extrêmal et $d^\circ P=N(A,t)-n(A,t)$ tels que $A=QP$,*

2) *id avec* $A=P'Q'$,
3) $D/DP \approx D/DP'$, $D/DQ \approx D/DQ'$, $D/DA \approx D/DP \oplus D/DQ$.

Le théorème et son corollaire permettent:—dans le cas de l'opérateur δ de décomposer (à droite ou à gauche) $A \in K[\delta]$ en nu produit de facteurs dont l'un est fuchsien et les autres t_i-extrêmaux avec $t_i < \alpha(\delta)$, les t_i étant les valeurs exceptionnelles de A inférieures à $\alpha(\delta)$—dans le cas de l'opérateur τ de décomposer (à droite ou à gauche) $A \in K[\tau]$ en un produit de facteurs t_i-extrêmaux, les t_i étant les valeurs exceptionnelles de A.

§ 2. Lemmes de Hensel.

On suppose désormais que K est *commutatif* et que $\tau \neq$ identité. Alors $\delta = c(\tau - 1)$ et $\alpha(\delta) = v(c) + \alpha(\tau)$.

Si $\mathcal{O}$ est l'anneau de valuation de K et $\mathcal{M}$ son idéal maximal, l'isométrie τ envoie $\mathcal{M}$ dans lui-même et définit donc par passage au quotient une application $\bar{\tau}$ du corps résiduel k de K dans lui-même: $\bar{\tau}$ est encore un isomorphisme ($\bar{\tau}(\bar{a})=0 \Leftrightarrow \tau(a) \in \mathcal{M} \Leftrightarrow a \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \bar{a}=0$). Lorsque $\alpha(\tau) \neq 0$, $\bar{\tau} = \mathrm{id}$ (car alors $v(\tau(a)-a)>0$ i.e. $\tau(a)-a \in \mathcal{M}$).

Si maintenant δ est une τ-dérivation telle que $\alpha(\delta) \geq 0$ (i.e. $v(c) \geq -\alpha(\tau)$) δ passe au quotient et induit une $\bar{\tau}$-dérivation sur k qui est donc une dérivation (au sens habituel) lorsque $\alpha(\tau) \neq 0$.

1) *Lemme de Hensel pour* $K[\delta]$ *lorsque* $\alpha(\delta)>0$.

On suppose dans ce paragraphe que $\alpha(\tau) \neq 0$ et $\alpha(\delta)>0$. Dans ce cas δ induit sur k la dérivation triviale et on peut démontrer un lemme de Hensel exactement comme dans le cas différentiel correspondant (Robba [7] 2.7 à 2.9).

Pour $X=(X_1, \cdots, X_m)$ et $\mu=(\mu_1, \cdots, \mu_m)$ où les $\mu_i \in N$ on définit $X^\mu = X_1^{\mu_1} X_m^{\mu_m} \cdots X_m^{\mu_m}$. Soit

$$F(X, Y_1, \cdots, Y_s) = \sum_{\substack{\text{finie} \\ \mu \in N^m \\ \nu_i \in N^m \; i=1,\cdots,s}} C_{\mu,(\nu_i)} X^\mu Y_1^{\nu_1} \cdots Y_s^{\nu_s} \quad \text{avec} \quad C_{\mu,(\nu_i)} \in \mathcal{O}^m.$$

Résoudre dans $\mathcal{O}^m$ le "système aux différences" F c'est chercher $u \in \mathcal{O}^m$ tel que

$$(*) \qquad G(u) := F(u, \delta(u), \delta^2(u), \cdots, \delta^s(u)) = 0.$$

Pour $u \in \mathcal{O}^m$ on appelle application tangente en u à G l'application

L_u: $\mathcal{O}^m \to \mathcal{O}^m$ définie par:

$$(**) \qquad L_u(z) = \sum_{i=1}^m z_i \frac{\partial F}{\partial X_i}(u, \delta(u), \delta^2(u), \cdots, \delta^s(u)) + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^m \delta^j(z_i) \frac{\partial F}{\partial Y_{j,i}}(u, \delta(u), \cdots, \delta^s(u)).$$

Résoudre le système obtenu par passage au quotient c'est résoudre dans k^m le système: $\bar{G}(X)=\sum_\mu \bar{C}_{\mu,(0)}X^\mu=0$ dont l'application tangente en $u^* \in k^m$ est:

$$\bar{A}_{u^*}(z)=\sum_{i=1}^{m} z_i \frac{\partial \bar{G}}{\partial X_i}(u^*).$$

Théorème 2.1. 1° *Avec les notations précédentes soit $u^* \in k^m$ une solution de $\bar{G}(u^*)=0$. Si $\bar{A}_{u^*}$ est inversible dans k^m, alors u^* se relève de façon unique en une solution $u \in \mathcal{O}^m$ de l'équation $G(u)=0$.*

2° *Soit $A \in \mathcal{O}[X]$ de degré $m+n$. Supposons que son image $\bar{A}$ dans $k[X]$ se factorise sous la forme* (i) *$\bar{A}=Q^*P^*$ où P^* est unitaire de degré n, Q^* et P^* étant premiers entre eux. Alors*

a) *il existe un unique relèvement Q, P de Q^*, P^* avec $d°P=n$, P unitaire tel que*

$$A(\delta)=Q(\delta)P(\delta), \tag{ii}$$

b) *idem de l'autre côté avec P' et Q',*

c) *si $D=K[\delta]$, $D/DP\approx D/DP'$, $D/DQ\approx D/DQ'$, $D/DA\approx D/DP\oplus D/DQ$.*

Démonstration. Le 1° se démontre comme dans le paragraphe cité de Robba par un théorème de point fixe dans: $U=\{z \in \mathcal{O}^m \mid v(z)\geq\lambda\}$ où $0<\lambda<\inf(\alpha(\delta), G(\eta))$ (η est un relèvement quelconque de u^*).

Le 2° se démontre en interprétant l'équation (ii) comme un système d'équations aux différences portant sur les coefficients d'ordre $\leq m-1$ et $\leq n-1$ de Q et P. Le système réduit est (i) dont l'application tangente est l'application:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{m-1}\times\mathcal{P}_{n-1} &\longrightarrow \mathcal{P}_{m+n-1}\\ (U, V) &\longrightarrow UP^*+Q^*V. \end{aligned}$$

Par Bezout cette application est inversible si et seulement si P^* et Q^* sont premiers entre eux.

La méthode précédente ne s'applique pas à $K[\tau]$ (l'applicztion considérée n'est plus contractante). On peut cependant suivre la méthode qu'emploie Robba dans le cas de l'opérateur d'Euler mais l'action d'un polynôme $\pi(\tau) \in K[\tau]$ sur $K=k((1/x))$ n'est pas aussi simple à décrire (ici τ est la translation). On introduit le corps K' isomorphe à K des séries de facultés formelles sur lequel l'action de la translation $(+1)$ est plus agréable à étudier.

2) *Isomorphisme entre $k((1/x))$ et les séries de faculté méromorphes formelles.*

Le k-espace vectoriel K' des séries de facultés méromorphes formelles c'est l'ensemble des $\sum_{s\geq s_0} a_s[x]_s$ (s et $s_0 \in Z$) où

$$[x]_s=\begin{cases} 1/x(x+1)(x+1)\cdots(x+s-1) & \text{si } s>0\\ 1 & \text{si } s=0\\ (x-1)(x-2)\cdots(x+s) & \text{si } s<0 \end{cases}$$

(i.e. $[x]_s{''}={''}\Gamma(x)/\Gamma(x+s)$).

Rappelons les classiques formules de translation: pour $n\geq 0$ et $\beta\in \boldsymbol{C}$ on a:

$$[x]_n=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\beta(\beta+1)\cdots(\beta+s-1)n(n+1)\cdots(n+s-1)[x+\beta]_{n+s}.$$

En particulier si $\beta=-P\in -\boldsymbol{N}$ cette somme est finie:

$$[x]_n=\sum_{s=0}^{p}\frac{(-1)^s}{s!}p(p-1)\cdots(p-s+1)n(n+1)\cdots(n+s-1)[x-p]_{n+s}$$

$$[x]_{-n}=\sum_{s=0}^{n}\frac{1}{s!}\beta(\beta-1)\cdots(\beta-s+1)n(n-1)\cdots(n-s+1)[x-\beta]_{-n+s}.$$

A partir de ces formules on définit une multiplication dans K': si n et $P\in$ on pose:

$$[x]_n[x]_p=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}n(n+1)\cdots(n+s-1)p(p+1)\cdots(p+s-1)[x]_{n+p+s}$$

$$[x]_n[x]_{-p}=[x]_{-p}[x]_n=\sum_{s=0}^{p}\frac{(-1)^s}{s!}n(n+1)\cdots(n+s-1)p(p-1)\cdots(p-s+1)[x]_{n-p+s}$$

$$[x]_{-n}[x]_{-p}=\sum_{s=0}^{\inf(n,p)}\frac{1}{s!}n(n-1)\cdots(n-s+1)p(p-1)\cdots(p-s+1)[x]_{-n-p+s}.$$

On définit les applications Φ: $K\to K'$ et $K'\to K$ par:

$$\Phi(1)=\mathscr{S},\quad \Phi(1/x)=1/x \quad \text{et pour } n\geq 1:$$

$$\Phi(1/x^{n+1})=(-1)^n(n-1)!\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k s(n+k,n)[x]_{n+k+1}$$

où les $s(i,j)$ sont les nombres de Stirling de première espèce ([9] par exemple).

$$\Phi(x^n)=\sum_{k=0}^{n}S(n+1),\ k+1)[x]_k$$

où les $S(i,j)$ sont les nombres de Stirling de deuxième espèce.

$$\Phi'([x]_0)=1 \quad \text{et pour } n\geq 1:$$

$$\Phi'([x]_{-n})=\sum_{k=0}^{n}s(n+1,\ k+1)x^k$$

$$\Phi'([x]_n)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k S(n+k-1,\ n-1)\,1/x^{n+k}.$$

Proposition 2.2. *K' est un corps isomorphe à K.*

Démonstration. Les applications Φ et Φ' expriment des identités combinatoires classiques, il est clair que $\Phi'=\Phi^{-1}$ et que Φ est un isomorphisme de k-espace vectoriel respectant la multiplication. Donc K' est un corps isomorphe à K. De plus Φ (et Φ') est une isométrie pour la valuation évidente sur K'.

3) *Lemme de Hensel pour $k((1/x))[\tau]$ où τ est la translation unité.*

Lemme 2.3. *Soit $\pi(\tau) \in k[\tau]$ tel que $\pi(1) \neq 0$, alors $\forall s_0 \in \boldsymbol{Z}$, $\pi(\tau)$ est une isométrie de la boule $U_{s_0} = \{a \in k((1/x)) \mid v(a) \geq s_0\}$.*

Démonstration. Pour tout $s \in \boldsymbol{Z}$ on a:

$$\tau([x]_s) = \Gamma(x+1)/(x+s+1) = x\Gamma(x)/(x+s)\Gamma(x+s) = [x]_s - s[x]_{s+1}$$

et par récurrence: pour tout $k \in \boldsymbol{N}^*$

$$\tau^k([x]_s) = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} s(s+1) \cdots (s+l-1)[x]_{s+1}.$$

Si $\pi(\tau) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \tau^k \in k[\tau]$ et $a = \sum_{s \geq s_0} a_s [x]_s \in K'$ on a:

$$\pi(\tau)(a) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \sum_{s \geq s_0} a_s \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} s(s+1) \cdots (s+l-1)[x]_{s+l}.$$

En posant $t = s + l$ il vient:

$$\begin{aligned} \pi(\tau)(a) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \sum_{t \geq s_0} [x]_t \sum_{s=\max(t-k, s_0)}^{t} a_s \binom{k}{t-s} (-1)^{t-s} s(s+1) \cdots (t-1) \\ &= \sum_{t \geq s_0} [x]_t \sum_{s=\max(t-n, s_0)}^{t} (-1)^{t-s} s(s+1) \cdots (t-1) a_s \sum_{k=t-s}^{n} \binom{k}{t-s} \alpha_k. \end{aligned}$$

Pour $t \leq n + s_0$ le coefficient de $[x]_t$ est

$$\sum_{s=s_0}^{t} a_s (-1)^{t-s} s(s+1) \cdots (t-1) \sum_{k=t-s}^{n} \binom{k}{t-s} \alpha_k.$$

En particulier le coefficient de $[x]_{s_0}$ est:

$$a_{s_0} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = \pi(1) a_{s_0}.$$

La condition $\pi(1) \neq 0$ assure donc que $v(\pi(\tau)(a)) = v(a)$ $\forall a \in U_{s_0}$. En particulier $\pi(\tau)$ est injective. Soit alors $b \in U_{s_0}$ et posons $s_1 = v(b)$. Si $b = \sum_{s \geq s_1} b_s [x]_s$ avec $b_{s_1} \neq 0$ la condition $\pi(\tau)(a) = b$ équivaut à: $v(a) = s_1$ et pour tout $t \geq s_1$:

$$\sum_{s=\max(t-n, s_1)}^{t} a_s (-1)^{t-s} s(s+1) \cdots (t-1) \sum_{k=t-s}^{n} \binom{k}{t-s} \alpha_k = b_t.$$

C'est un système linéaire triangulaire en les a_s dans lequel les termes de la diagonale ont tous pour coefficient $\pi(1)$.

Suivant Robba (2.10 à 2.13), on interprète l'application linéaire tangente L_u (mêmes notations qu'au 1)) comme une matrice $m \times m$ à coefficients dans $\mathcal{O}[\tau]$.

Pour $u^* \in k^m$, on définit $\bar{L}_{u^*}$ comme la $m \times m$ matrice à coefficients dans $k[\tau]$ réduite de L_{u^*}. Comme $\bar{\tau}=1$, le i, j-ième coefficient de $\bar{L}_{u^*}$ est:

$$\frac{\partial \bar{F}_i}{\partial X_j}(u^*, 1, 1, \cdots 1)+\sum_{l=1}^{s} \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial Y_{l,j}}(u^*, 1, 1, \cdots 1)\tau^l.$$

Les opérateurs aux différences à coefficients dans k commutent entre eux, ce qui permet de définir dét $(\bar{L}_{u^*}) \in k[\tau]$.

Proposition 2.4. *Soit $u^* \in k^m$ une solution de $\bar{G}(u^*)=0$. Si $\pi(\tau)=$ dét $(\bar{L}_{u^*})$ vérifie $\pi(1)\neq 0$, il existe un unique relèvement $u \in \mathcal{O}^m$ de $u*$, solution de $G(u)=0$.*

Théorème 2.5. *Soit $A \in \mathcal{O}[X]$ de degré $m+n$. Supposons que son image $\bar{A}$ dans $k[X]$ se factorise sous la forme* (i) $\bar{A}=Q^*P^*$ *où P^* est unitaire de degré n. Si P^* et Q^* sont premiers entre eux, il existe un unique relèvement Q, P de Q^*, P^* avec $d°P=n$, P unitaire, tel que* (ii) $A(\tau)=Q(\tau)P(\tau)$, *etc..*

Démonstration. L'équation (ii) est un système de $m+n$ équations aux différences (portant sur les coefficients d'ordre $\leq m-1$ et d'ordre $\leq n-1$ de Q et P) et (i) est le système réduit. Il s'agit de montrer que le déterminant $\pi(\tau)$ de $\bar{L}_{Q^*,P^*}$ vérifie $\pi(1)\neq 0$. Or $\bar{L}_{Q^*,P^*}$ s'interprète comme l'application:

$$\mathcal{P}_{m-1}\times\mathcal{P}_{n-1}\longrightarrow\mathcal{P}_{m+n-1} \quad (\mathcal{P}_m \text{ polynômes à coefficients dans } K' \text{ de degré } m)$$

$$(U(\tau),\ V(\tau))\longrightarrow U(\tau)P^*(\tau)+Q^*(\tau)V(\tau)$$

où si $P^*=\sum P_i\tau^i,\ p_i \in k, \quad U=\sum u_i\tau^i,\ u_i \in K',$

$Q^*=\sum q_j\tau^j,\ q_j \in k, \quad V=\sum v_j\tau^j,\ v_j \in K',$

$UP^*+Q^*V=\sum_{i,j} u_ip_j\tau^{i+j}+\sum_{i,j} q_i\tau^i(v_j)\tau^{i+j}.$

Et donc, si dans la matrice de L_{Q^*,P^*} on fait $\tau=1$ on obtient la matrice de l'application $(U(X),\ V(X))\to U(X)P^*(X)+Q^*(X)V(X)$ qui est inversible si et seulement si P^* et Q^* sont premiers entre eux.

Ces résultats sont pour les opérateurs aux différences les équivalents du lemme de décomposition pour les modules différentiels de Levelt [2].

§ 3. Decomposition d'un operateur aux differences.

On suppose désormais que $K=\boldsymbol{C}((1/x))$. Dans ce ces (par ex. Serre [8] ch. IV, § 2, Prop. 8) toute extensions algébrique finie de K se plonge dans une extension galoisienne cyclique de la forme $\boldsymbol{C}((1/t))$ où $t^m=x$.

Lemme 3.1. *Toute isométrie* $\tau \neq \mathrm{id}$ *de* $K = \boldsymbol{C}((1/x))$ *telle que* $\alpha(\tau) \neq 0$ (*resp. toute* τ*-dérivation* δ) *se prolonge de manière unique en une isométrie* τ' *de* $L = \boldsymbol{C}((1/t))$ *où* $t^m = x$ *de même degré* (*resp. en une* τ'*-derivation* δ' *de même degré*).

Démonstration. Les isométries τ vérifiant les hypothèses sont telles que: $\tau(x) = xu$ avec $u \in 1 + \mathscr{M}_K$ $(u \neq 1)$ où $\mathscr{M}_K = \{a \in K \mid v(a) > 0\}$ et $\alpha(\tau) = v(u-1)$.

En effet puisque $v(\tau(x)) = v(x)$ $(=-1)$, $\tau(x) = x\lambda u$ avec $u \in 1 + \mathscr{M}_K$ et $\lambda \in \boldsymbol{C}$. Si $\lambda \neq 1$, $\tau(x) - x = x(\lambda u - 1)$ a une valuation égale à celle de x et $\alpha(\tau) = 0$. Réciproquement si $\tau(x) = xu$ avec $u \in 1 + \mathscr{M}_K$, alors $\forall s \in \boldsymbol{Z}$, $u^s \in 1 + \mathscr{M}_K$ et $v(u^s - 1) = v(u-1)$ (fromule du binôme) donc si $a = \sum a_s x^s \in K$,

$$\tau(a) - a = \sum a_s x^s (u^s - 1) \quad \text{et} \quad v(\tau(a) - a) - v(a) = v(u-1).$$

D'autre part pour tout $u \in 1 + \mathscr{M}_K$ et pour tout entier m il existe un unique élément, noté $u^{1/m}$ de $1 + \mathscr{M}_K$ dont la puissance $m^{\text{ième}}$ est u. La formule $\tau'(t) = t\bar{u}^{1/m}$ (où $\bar{u}^{1/m}$ désigne l'image dans L de $u^{1/m}$) définit une isometrie de L prolongeant τ telle que $\alpha(\tau') = v'(\bar{u}^{1/m} - 1)$ où v' désigne l'unique prolongement de v à L. Mais $v'(\bar{u}^{1/m} - 1) = v(u^{1/m} - 1) = v(u-1) = \alpha(\tau)$.

Unicité. Un prolongement τ'' de τ doit vérifier $\tau''(t^m) = (\tau''(t))^m = \overline{\tau(x)} = x\bar{u}$ avec $u \in 1 + \mathscr{M}_K$ donc $\tau''(t) = \lambda\tau'(t) = \lambda t u'$ où λ est une racine $m^{\text{ième}}$ de 1 dans $\boldsymbol{C}$ et $u' \in 1 + \mathscr{M}_L$. Mais d'après la remarque du début si $\lambda \neq 1$, $\alpha(\tau'') = 0 \neq \alpha(\tau)$. Toute τ-dérivation est de la forme $\delta = c(\tau - 1)$, $c \in K$: elle se prolonge en $\delta' \bar{c}(\tau' - 1)$. On a $\alpha(\delta') = v'(\bar{c}) + \alpha(\tau') = v(c) + \alpha(\tau) = \alpha(\delta)$. C'est l'unique τ'-dérivation prolongeant τ puisque toute τ'-dérivation est de la forme $c'(\tau' - 1)$ avec $c' \in L$. En choisissant $a \in K$ tel que $\tau(a) - a \neq 0$ (c'est possible puisque $\tau \neq \mathrm{id}$) on a:

$$\delta'(\bar{a}) = \overline{\delta(a)} = c'(\tau'(\bar{a}) - \bar{a}) = c'(\overline{\tau(a)} - \bar{a}) = \bar{c}(\overline{\tau(a)} - \bar{a}) \quad \text{donc} \quad c' = \bar{c}.$$

Corollaire 3.2. *Si* $P \in K[\delta]$ *est fuchsien, il est encore fuchsien quand on le considère comme élément de* $L[\delta]$. *Dans la suite on notera* τ *et* δ *les prolongements de* τ *et* δ *à* L.

Un opérateur $P \in K[\tau]$ peut se décomposer en produit d'opérateurs t_i-extrêmaux $(t_i \in \boldsymbol{Q})$ qu'on peut regarder dans une extension convenable $L = \boldsymbol{C}((1/s))$ où $s^q = x$ de K comme des homothétiques d'opérateurs o-extrêmaux. (Rappelons remarque suivant le corollaire 1.5) qu'une homothétie correspond à un changement de fonction qu'on peut prendre de la forme:

$$f(x) = (\Gamma(x^{1/q})^{-p} g(x) \quad \text{si} \quad t_i = p/q).$$

Un opérateur o-extrêmal est à coefficients dans l'anneau de valuation et on peut lui appliquer le lemme de Hensel (théorème 2.5).

C'est en s'appuyant sur ces résultats, démontrés autrement que Praagman obtient une décomposition de l'opéranteur P et du module correspondant en composantes irréductibles ([5]).

Il semble cependant préférable (voir plus loin) de travailler avec l'opérateur δ. En recopiant Robba (§ 3) on peut obtenir dans une extension finie convenable de K une décomposition de $P \in K[\delta]$ en translatés d'opérateurs fuchsiens avec les mêmes propriétés d'unicité que dans le ces différentiel. Malheureusement nous ne voyons pas comment interprêter ce résultat au niveau des "solutions" de l'équation aux différences $P(\delta)_\varphi = 0$.

Le théorème suivant montre qu'on peut obtenir sur le même principe, du moins lorsque c est un point fixe de τ, une décomposition de P (toujours dans une extension convenable) en produits d'opérateurs de la forme

$$P_i((1+\beta_i/c)\delta+\beta_i) \quad \beta_i \in L,\ P_i \quad \text{fuchsien.}$$

Ceci correspond (remarque 2) suivant le corollaire 1.5) à effectuer dans P le changement de fonction $\varphi = \gamma_i\beta_i$ avec $\delta(\gamma_i) = \beta_i\gamma_i$ équation aux différences qui lorsque β_i est une fraction rationnelle admet une solution qui est un produit de facteurs $\Gamma(x-\alpha_i)$ (α_i zéro de β_i) et d'inverse de facteurs $\Gamma(x-\alpha'_i)$ (α'_i pôle de β_i). Comme d'autre part P_i fuchsien veut dire dans le cas où τ est la translation $+1$ que ses solutions sont "à croissance lente" (voir par ex. Nortund [4] ch. 2 en utilisant l'isomorphisme entre K et K'), cette décomposition est tout à fait analogue à celle obtenue dans le cas des opérateurs différentiels.

Theorem 3.3. *Soient $K = \boldsymbol{C}((1/x))$, τ une isométrie de degré non nul, $\delta = c(\tau-1)$ une τ-dérivation telle que c soit un point fixe de τ et $P \in K[\delta]$ un polynôme dans lequel τ $(=1+\delta/c)$ n'est pas en facteur. Il exists une extension fine L de K, des $\beta_i \in L$ $(1 \le i \le q)$ et des $P_i \in L[\delta]$ fuchsiens tels qu'on ait:*

1° $P(\delta) = \prod_{i=1}^{q} P_i((1+\beta_i/c)\delta+\beta_i)$

2° $L[\delta]/L[\delta]P(\delta) \approx \oplus_i L[\delta]/L[\delta]P_i((1+\beta_i/c)\delta+\beta_i)$

3° (*Unicité*): *Dans la décomposition précédente on peut supposer que les P_i ne sont pas constants et que pour $i \neq j$ $v((\beta_i-\beta_j)/(1+\beta_i/c)) < \alpha(\delta)$. Alors si on a dans une même extension L une deuxième décomposition*

$$P(\delta) = \prod_{j=1}^{r} P'_j((1+\gamma_j/c)\delta+\gamma_j)$$

on a $r = q$ et il existe une permutation σ de $\{1, 2, \cdots, q\}$ telle que:

$$v\left(\frac{\beta_i-\gamma_{\sigma(i)}}{1+\beta_i/c}\right) \ge \alpha(\delta) \quad et$$

$$L[\delta]/L[\delta]P_i((1+\beta_i/c)\delta+\beta_i) \approx L[\delta]/L[\delta]P'_{\sigma(i)}((1+\gamma_{\sigma(i)}/c)\delta+\gamma_{\sigma(i)}) \quad (i=1, \cdots, q).$$

Démonstration. 1° et 2°: Si $t_1, t_2 \cdots$ sont les valuers exceptionnelles de P inférieures ou égales à $\alpha(\delta)$, on pose $r(P)=\alpha(\delta)-\inf_i t_i$. La démonstration se fait par récurrence sur les couples $(d^\circ P, r(P))$ ordonnés par ordre lexicographique. La récurrence commence soit à $r(P)=0$ où le résultat est évident pusque cela signifie que P est fuchsien, soit à $d^\circ\ P=1$. Alors $P=a(\delta-b)$, $a, b \in K$. On peut supposer $b\neq -c$ sinon τ serait en facteur dans P. Alors $S(\delta)=P((1+b/c)\delta+b)=a(1+b/c)\delta$ est fuchsien (en fait t-dominant $\forall t \in \boldsymbol{R}$). Remarquons que P fuchsien équivaut à $v(b)\geq\alpha(\delta)$ et donc, si P n'est pas déjà fuchsien c'est que $v(b)<\alpha(\delta)$.

Pour traiter le cas général on peut supposer que P est t-extrêmal avec $t<\alpha(\delta)$ (théorème 1.9 et corollaire 1.10). On distingue plusieurs cas.

1) $v(c)<t<\alpha(\tau)+v(c)$: La méthode est alors très voisine de celle de Robba car c'est le cas où la similitude se comporte comme la translation associée et nous en indiquerons seulement les grandes lignes. Deux cas sont à considérer:

a) Si t n'est pas entier, soient η et η' deux racines de $P(X)=0$ dans une extension L convenable de K. Alors $v(\eta)=t=v(\eta')$ et on peut choisir η et η' telles que $v(\eta-\eta')=t$. Soit alors $R(X)=P((1+\eta/c)X+\eta)$ et $S(\delta)=P((1+\eta/c)\delta+\eta)$. Comme $v(\eta)=t$, $v(\eta/c)=t-v(c)>0$ donc $v(1+\eta/c)=0$. Le corollaire 1.5 donne:

$$N(S, t)=N(R, t)=N(P, t)\ (=d^\circ P) \quad \text{et} \quad n(S, t)=n(R, t).$$

D'autre part $R(X)$ a pour racines 0 et $(\eta'-\eta)/(1+\eta/c)$ dont la valuation est t: on déduit de la propriété 3) rappelée au début du § 1 que: $n(R, t)>0$ et que $N(R, t)-n(R, t)>0$. Donc aussi $n(S, t)>0$ et $N(S, t)-n(S, t)>0$. Le corollarie 1.10 permet alors d'abaisser le degré de P.

b) Si t est entier, il existe cette fois deux racines η et η' de $P(X)=0$ telles que $v(\eta)=v(\eta')=t$ et $v(\eta-\eta')>t$ donc aussi $v((\eta-\eta')/(1+\eta/c))>t$. Comme ci-dessus on a $n(S, t)>0$ et ou bien $N(S, t)-n(S, t)>0$ et le degré s'abaisse ou bien $N(S, t)=n(S, t)$ et t n'est pas valeur exceptionnelle pour S. Le corollaire 1.5 montre que les valeurs exceptionnelles ce S sont toutes $>t$ (ou que S est fuchsien) et on conclut par la récurrence sur $r(P)$ (qui est un entier dans ce cas).

2) $t<v(c)$; a) Si t n'est pas entier soient η, η', R et S comme précédemment. Cette fois $v(1+\eta/c)=v(\eta/c)=t-v(c)$ et le corollaire 1.5 donne:

$$N(R, v(c))=N(S, v(c))=N(P, t).$$

D'autre part $R(X)$ a pour racines 0 et $(\eta'-\eta)/(1+\eta/c)$ dont la valuation est

$$t-(t-v(c))=v(c).$$

On en déduit:

$$n(R, v(c))>0 \quad \text{et} \quad N(R, v(c))-n(R, v(c))>0.$$

De plus pour tout $t'\leq\alpha(\delta)$ on a (proposition 1.3):

$$v(S, t')=v(P(\delta+\eta), t'+t-v(c))$$

donc en dérivant à droite puisque $v(c)<\alpha(\delta)$:

$$n(S, v(c))=n(P(\delta+\eta), t).$$

De même $n(R, v(c))=n(P(X+\eta), t)$ et la proposition 1.4 donne puisque $v(\eta)=t<\alpha(\delta)$:

$$n(S, v(c))=n(R, v(c)).$$

Donc cette fois $n(S, v(c))>0$ et $N(S, v(c))-n(S, v(c))>0$. Le corollaire 1.10 permet d'extraire de S un facteur $v(c)$-extrêmal de degré strictement inférieur à celui de P.

b) Sur le même modèle on montre lorsque t est entier que $n(S, v(c))>0$ puisque ou bien $N(S, v(c))-n(S, v(c))>0$ et c'est la situation du a), ou bien $N(S, v(c))=n(S, v(c))$ c'est-à-dire que $v(c)$ n'est pas valeur exceptionnelle pour S. Mais cette fois le corollaire 1.5 montre que pour $t'\leq v(c)$ on a:

$$v(S, t')=v(P, t'+t-v(c))$$

et donc que les valeurs exceptionnelles de S sont $>v(c)$ et la récurrence permet de continuer conduisant cette fois à des facteurs fuchsiens.

3) $t=v(c)$: On prend toujours η racine de $P(X)=0$ avec $v(\eta)=v(c)$ qui est donc entier. On a certainement $v(1+\eta/c)\geq 0$.

a) Si $v(1+\eta/c)=0$ on peut faire le même raisonnement que dans le cas 1) b) ci-dessus: si $v(c)$ n'est pas exceptionnel pour S toutes les valeurs exceptionnelles de S sont $>v(c)$ et l'hypothèse de récurrence sur $r(P)$ permet de continuer. Remarquons que jusqu'ici on n'a pas eu besoin de l'hypothèse $\tau(c)=c$: elle nous servira à étudire le dernier cas, celui où.

b) $v(1+\eta/c)>0$ i.e. $\eta=c(u-1)$ avec $v(u)>0$ ($v(u)$ n'est pas forcément entier). Remarquons que $1+\eta/c\neq 0$ sinon P autrait τ en facteur: en effet si $P(-c)=0$ comme $P(\delta)=P(c\tau-c)$ et que, vue l'action de τ, $P(c\tau-c)$ et $P(cX-c)$ ont même terme constant, cela signifie que $P(c\tau-c)$ n'a pas de terme constant. En reprenant toujours le même argument il vient cette fois:

$$v(S, t')=v(P, t'+v(u))=v(R, t') \quad \text{pour} \quad t'\leq v(c)-v(u)$$

et $v((\eta'-\eta)/(1+\eta/c))>v(c)-v(u)$ donc $n(S, v(c)-v(u))>0$, mais dans le cas où le degré ne s'abaisse pas $v(c)-v(u)<v(c)$ et la récurrence sur $r(P)$ n'est plus possible. On raisonne comme suit: si S n'a pas de valeur exceptionnelle $<\alpha(\delta)$, il est fuchsien et le travail est terminé. S'il y a plusieurs valeurs exceptionnelles $<\alpha(\delta)$, le degré s'abaisse (théorème 1.9 et son corollaire) et la récurrence continue. Si S n'a qu'une valeur exceptionnelle t: ($v(c)-v(u)<t<\alpha(\delta)=v(c)+\alpha(\tau)$), trois cas sont possibles:

i) $v(c)<t<v(c)+\alpha(\tau)$ et la méthode du 1) d'applique à S,

ii) $t<v(c)$ et la méthode du 2) conduit soit à abaisser le degré soit à un facteur fuchsien, soit à une valeur exceptionnelle $>v(c)$, ce qui ramène au cas précédent,

iii) $t=v(c)$ et on ne peut conclure $\cdots$ mais le lemme 3.6 ci-dessous montre que sous l'hypothèse $\tau(c)=c$ cette situation ne peut se produire pour *toutes* les racines de $P(X)$.

Ceci achève la démonstration des propriétés 1° et 2° en posant $\beta_i=-\eta_i(1+\eta_i/c)$.

3° *Unicité.* La démonstration est celle de la propriété analogue du théorème 3.2 de Robba avec pour seules modifications celles qui résultent des énoncés suivants:

Lemme 3.4. *Soit P un opérateur funcsien et $\eta \in L$ (extension algébrique finie de K). Alors si $v(\eta)<\alpha(\delta)$, $S_\eta(\delta)=P((1+\eta/c)\delta+\eta)$ est $v(\eta/(1+\eta/c))$-extrémal et $N(S, \alpha(\delta))=0$ si $v(\eta)\geq\alpha(\delta)$, $S_\eta(\delta)$ est fuchsien.*

Corollaire 3.5. *Soit $P(\delta)=\prod_{i=1}^{q} P_i((1+\beta_i/c)\delta+\beta_i)$ une démcomposition de P comme en 1° et $\eta \in L$ alors*

$$N(S_\eta(\delta), \alpha(\delta))=\sum_{\{i \mid v(\eta+\beta_i+\eta\beta_i/c)\geq\alpha(\delta)\}} d^\circ P_i.$$

Démonstration du lemme. Si $v(\eta)\geq\alpha(\delta)=\alpha(\tau)+v(c)$, alors $v(\eta/c)\geq\alpha(\tau)>0$ donc $v(1+\eta/c)=0$ et le corollaire 1.5 montre que pour $t\leq\alpha(\delta)$, $S_\eta(\delta)$ et P ont même fonction de valuation.

Si $v(\eta)<\alpha(\delta)$, soit $R_\eta(X)=P((1+\eta/c)X+\eta)$. Les zéros de P sont par hypothèse de valuation $\geq\alpha(\delta)$; ceux de R sont alors tous de valuation $v(\eta/(1+\eta/c))$ puisqu'ils sont de la forme $(\eta_0-\eta)/(1+\eta/c)$ où η_0 est zéro de P. Donc $R_\eta(X)$ est $v(\eta/(1+\eta/c))$-extrêmal et le corollaire 1.5 montre que S l'est aussi. D'où le résultat puisque $v(\eta/(1+\eta/c))<\alpha(\delta)$: en effet $v(\eta/(1+\eta/c))=v(\eta)-v(1+\eta/c)$ donc si $v(1+\eta/c)\geq 0$, $v(\eta/(1+\eta/c))\leq v(\eta)<\alpha(\delta)$ et si $v(1+\eta/c)<0$ c'est que $v(1+\eta/c)=v(\eta/c)$ et $v(\eta/(1+\eta/c))=v(c)<\alpha(\delta)=v(c)+\alpha(\tau)$.

Lemma 3.6. *Soient τ et δ comme dans ie théorème 3.3 et $P \in K[\delta]$ un polynôme unitaire de degré n, $v(c)$-extrêmal tel que les n racines de $P(X)=0$ soient de la forme $c(u_i-1)$ $(i=1, \cdots, n)$ avec $v(u_i)>0$. Soit u l'un des u_i dont la valuation minimise $v(u_i)$ $i=1, \cdots, n$. Alors $S(\delta)=P(u\delta+c(u-1))$ n'est pas $v(c)$-extrêmal.*

Démonstration. Le polynôme S est de degré n et le coefficient de δ^n est:

$$u\tau(u)\tau^2(u)\cdots\tau^{n-1}(u) \quad \text{qui a pour valuation: } nv(u).$$

On va montrer que le terme constant des S a une valuation supérieure ou égale à: $nv(u)+nv(c)+\alpha(\tau)$, ce qui assure le résultat puisque $\alpha(\tau)>0$. On peut écrire P sous la forme:

$$P(\delta)=\sum_{i=1}^{n} c^i\sigma_i\delta^{n-i},$$

où $\sigma_0=1$ et où $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ désignent les fonctions symetriques élémentaires ("alternées") des n quantités (u_i-1) (on supposera dans la suite que $u_1=u$).

On remarque que $u\delta+c(u-1)=uc(\tau-1)+c(u-1)=c(u\tau-1)$, donc

$$S(\delta)'' = ''P(c(u\tau-1))=\sum_{i=0}^{n} c^i\sigma_i c^{n-i}(u\tau-1)^{n-i} \quad \text{(ici on a utilisé } \tau(c)=c)$$
$$=c^n\sum_{i=0}^{n}\sigma_i(u\tau-1)^{n-i}.$$

Comme $\tau=1+\delta/c$ et que $\delta(1/c)=0$ (toujours parce que $\tau(c)=c$) le terme constant A_n de $S(\delta)$ s'obtient en faisant $\tau=1$ dans la formule précédente développée suivant les puissances de τ:

$$A_n=c^n\sum_{i=0}^{n}\sigma_i\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^{n-i-j}\binom{n-i}{j}u\tau(u)\tau^2(u)\cdots\tau^{j-1}(u)$$
$$\text{(avec } u\tau(u)\cdots\tau^{j-1}(u)=1 \text{ si } j=0)$$
$$=c^n\sum_{j=0}^{n}u\tau(u)\tau^2(u)\cdots\tau^{j-1}(u)\sum_{i=0}^{n-j}(-1)^{n-i-j}\binom{n-i}{j}\sigma_i.$$

Si $P_1(X)$ désigne le polynôme $\sum_{i=0}^{n}\sigma_i X^{n-i}$, on a

$$\sum_{i=0}^{n-j}(-1)^{n-i-j}\binom{n-i}{j}\sigma_i=P_1^{(j)}(-1)/j!.$$

C'est donc (formule de Taylor) le coefficient de X^j dans le polynôme $P_1(X-1)$ dont les racines sont: $u, u_2, \cdots, u_n$ donc $P_1^{(j)}(-1)/j!=s_{n-j}$ où $s_0=1$ et où $s_1, \cdots, s_n$ désignent les fonctions symétriques élémentaires de $u, u_2, \cdots, u_n$. Autrement dit

$$A_n=c^n\sum_{j=0}^{n}u\tau(u)\tau^2(u)\cdots\tau^{j-1}(u)s_{n-j}.$$

Si $s_j', \cdots, s_{n-1}'$ désignent les fonctions symétriques élémentaires de $u_2, \cdots, u_n$ on a: $s_j=s_j'-us_{j-1}'$ pour $j=1, \cdots, n-1$ $(s_0'=1)$, et $s_n=-us_{n-1}'=s_n'-us_{n-1}'$en posant $s_n'=0$. Il vient

$$A_n=c^n\left[u\tau(u)\cdots\tau^{n-1}(u)+\sum_{j=0}^{n-1}u\tau(u)\cdots\tau^{j-1}(u)[s_{n-j}'-us_{n-j-1}']\right]$$
$$=uc^n\sum_{j=0}^{n-2}s_j'\tau(u)\cdots\tau^{n-j-2}(u)[\tau^{n-j-1}(u)-u].$$

Il est facile de vérifier que $\alpha(\tau^n)\geq\alpha(\tau)$ et le résultat découle de l'inégalité $v(s_j')\geq jv(u)$.

Remarque. Si on ne suppose plus $\tau(c)=c$ il peut arriver que S soit encore $v(c)$-extrêmal. Par exemple avec $d^\circ P=2$ si $v(u)=v(1-\tau(c)/c)$, $S(u\delta+c(u-1))$ est $v(c)$-extrêmal.

Bibliographie

[1] Cohn, P. M., *Skew field constructions,* Camb. Univ. Press, 1977.
[2] Levelt, A., Jordan decomposition of a class of singular differential operators, Ark. Mat., **13** (1975), 1–27.
[3] Malgrange, B., Sur la réduction formelle des équations différentielles à singularité irrégulière, Grenoble, 1979, (Preprint).
[4] Norlund, N. E., *Leçons sur les équations linéaires aux différences finies,* Gauthier- Villars, Paris, 1929.
[5] Praagman, C., The formal theory of linear difference equations, Gröningen, April 1981, (Preprint).
[6] Ramis, J. P., Dévissage Gevrey, Astérisque 59–60, 1978, 173–204.
[7] Robba, P., Lemmes de Hensel pour les opérateurs différentiels. Application à la réduction formelle des équations différentielles, Enseignement Math., XXVI, fasc. 3–4 (1980), 279–311.
[8] Serre, J. P., *Corps locaux,* Hermann Paris, 1962.
[9] Comtet, L., *Analyse combinatoire,* Tome 2, Collection Sup. P.U.F., 1970.

nuna adreso:
Département de Mathématique
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex
France

(Ricevita la 9-an de aprilo, 1983)
(Reviziita la 9-an de aŭgusto, 1983)