Remarque sur un Cas Particulier de la Méthode de Runge et Kutta

Par Tadeusz WAŻEWSKI

(Université de Kraków)

Soit $y=u(x)$ la solution issue du point $x=0, y=0$ de l'équation

$$y' = f(x, y).$$

Dans certains problèmes importants pour la pratique il s'agit d'approcher $u(x)$ par une fonction $z_i(x)$ d'une telle façon que l'on ait (cf. les notations des §§ 1 et 2)

$$(0.1_i) \quad u(x) = z_i(x) + o(x^i)$$

où $i \geq 2$ est un nombre entier.

Les formules bien connues de Runge et Kutta fournissent trois fonctions particulièrement simples d'une telle sorte

$$(0.2) \quad z_2(x), z_3(x), z_4(x).$$

Afin d'établir la relation (0.1_i) pour $z_i(x)$ du type de Runge et Kutta on est obligé d'admettre que $f(x, y)$ soit de classe C^i (cf. notation du § 1). Dans le procédé RK (de Runge et Kutta) pour démontrer (0.1_i) on prouve que pour les dérivées d'ordre j on a

$$(0.3_j) \quad u^{(j)}(0) = z^{(j)}(0), \quad (j=0, 1, \dots, i).$$

Les approximations $z_i(x)$ du type RK sont de classe C^i lorsque $f(x, y)$ est de classe C^i .

Cette voie de démonstration, si simple qu'elle soit, est agaçante par le grand nombre de calculs à faire.

En cherchant d'obtenir des formules analogues à celles de RK mais plus faciles à démontrer j'ai construit dans la note [1] une autre méthode d'approcher $u(x)$ par les fonctions $z_i(x)$ satisfaisant à (0.1_i). Cette méthode correspond au Théorème B inséré plus bas. Dans cette méthode, appelons-la méthode B, on admet relativement à $f(x, y)$ une hypothèse essentiellement plus faible qu'au cas RK (continuité en x et y et la condition de Lipschitz relativement à y). On admet cependant accessoirement que $u(x)$ soit de la classe C^i . Au cas de la méthode B la démonstration que les fonctions z_i qu'elle fournit satisfont à (0.1_i) est presque immédiate. La méthode B marche pour tous les $i \geq 2$ et ne s'arrête pas au cas de $i=4$ comme la méthode RK. Le procédé B s'applique aussi au cas où y et $f(x, y)$ varient dans l'espace de Banach (cf. [1]). Il convient d'observer qu'aux cas $i=3$ et $i=4$ le procédé B est moins économique

que la méthode RK.

Au cas particulier de $i=2$ les deux procédés RK et B coïncident. Il peut arriver que les fonctions continues z_i fournies par le procédé B peuvent ne pas posséder la première dérivée en aucun point $x \neq 0$. C'est en particulier possible au cas de $i=2$ (cf. Exemple 1).

§ 1. **Notations et remarques préliminaires.** R^p désigne l'espace euclidien à p dimensions, $R=R^1$.

Par $C^n(E)$ sera désignée la classe des fonctions réelles (d'une ou de plusieurs variables réelles) dont les dérivées partielles (ou ordinaires) d'ordre n sont continues dans l'ensemble E . $C^0(E)$ désigne la classe des fonctions continues dans E .

Un voisinage (suffisamment petit) de $x=0$ sera désigné par J et celui de l'origine des coordonnées $x=0, y=0$ par V .

Les fonctions réelles $h(x), u(x), z(x)$ seront envisagées dans J et la fonction réelle $f(x, y)$ dans V .

§ 2. Soit un entier $n \geq 0$. Nous posons par définition

$$(2.1) \quad h(x) = o(x^n) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} h(x)/x^n = 0$$

$$(2.2) \quad u(x) = z(x) + o(x^n) \Leftrightarrow u(x) - z(x) = o(x^n).$$

Envisageons les relations

$$(2.3) \quad u \in C^2(J)$$

$$(2.4) \quad z \in C^2(J)$$

$$(2.5) \quad u(x) = z(x) + o(x^2)$$

$$(2.6) \quad u(0) = z(0), \quad u^{(i)}(0) = z^{(i)}(0), \quad (i=1, 2)$$

$$(2.7) \quad u(0) = z(0), \quad u'(0) = z'(0), \quad z'(x) \text{ n'existe pas pour } x \neq 0.$$

Si (2.2) a lieu nous dirons que z est une $o(x^n)$ -approximation de u , ou bien que z approche u à $o(x^n)$ près. On a l'évidente

Proposition 1. Si (2.3) et (2.4) ont lieu les relations (2.5) et (2.6) sont équivalentes.

Définition 1. Si (2.3), (2.4) et (2.6) ont lieu la fonction $z(x)$ vérifiant (2.5) sera dite $o(x^2)$ -approximation régulière de $u(x)$. Si (2.5) et (2.7) ont lieu la fonction $z(x)$ sera dite $o(x^2)$ -approximation irrégulière de $u(x)$.

§ 3. Considérons l'équation différentielle

$$(3.1) \quad y' = f(x, y).$$

Introduisons les trois hypothèses suivantes, indépendantes entre elles (cf. les notations du § 1).

Hypothèse H. $f \in C^2(V)$

Hypothèse K. $f \in C^0(V)$, $|f(x, y) - f(x, z)| \leq N|y - z|$ dans V , (N est constante).

Hypothèse W. $y = u(x)$ est une solution issue de l'origine de l'équation (3.1), c'est-à-dire

$$(3.2) \quad u(0) = 0, \quad u'(x) \equiv f(x, u(x)) \quad \text{dans } J.$$

§ 4. **Formule RK (de Runge et Kutta).** Pour c, p, q tels que $c \neq 0$, $p + q = 1$, $cp = 1/2$ nous introduisons la fonction $z(x)$ par la suivante formule

$$(4.1) \quad z(x) = x(pf(0, 0) + qf(cx, cxf(0, 0))).$$

Théorème RK (de Runge et Kutta). Dans les Hypothèses W et H la fonction $z(x)$ possède les propriétés (2.4) et (2.5), c'est-à-dire $z(x)$ est une $o(x^2)$ -approximation régulière de la solution $u(x)$ de l'équation (3.1) (cf. la Définition 1).

Théorème B. Admettons les Hypothèses W et K et supposons accessoirement que

$$(4.2) \quad u(x) \in C^2(J).$$

Ceci étant admis

- I) $z(x)$ est une $o(x^2)$ -approximation de la solution $u(x)$ de l'équation (3.1).
- II) Il peut arriver que cette approximation est irrégulière (cf. la Définition 1).

Démonstration. Le Théorème RK constitue un cas particulier du théorème bien connu de Runge et Kutta. Il reste à prouver le Théorème B. Il est facile à vérifier que le Théorème B constitue un cas particulier du Théorème 2 de la note [1]. De l'Exemple 1 qui suit résulte la partie II du Théorème B.

§ 5. **Exemple 1.** Soit $g(x)$ une fonction telle que :

- 1°) $g(x)$ est continue et bornée dans R et la dérivée $g'(x)$ n'existe nulle part (on doit à Weierstrass la construction d'une telle fonction). Soit $G(x)$ la fonction primitive de $g(x)$, telle que

$$G(0) = 0, \quad G'(x) \equiv g(x).$$

Introduisons l'équation différentielle ordinaire dont la solution générale a la forme

$$y = x^3 + ke^{G(x)},$$

où k est une constante arbitraire. Cette équation différentielle est linéaire et a la forme

$$(5.1) \quad y' = f(x, y) = 3x^2 + (y - x^3)g(x).$$

Pour les points (x, y) qui ne sont pas situés sur la courbe $y = x^3$ la dérivée partielle $\partial f / \partial x$ n'existe pas. Il s'ensuit que les dérivées $\partial^2 f / \partial x^2$ et $\partial^2 f / \partial x \partial y$ n'existent nulle part. L'Hypothèse H constituant une de prémisses du Théorème RK n'a donc pas lieu. Il s'ensuit que pour prouver la relation (2.5) on ne peut pas appliquer le théorème classique RK de Runge et Kutta. Nous mon-

trerons que la relation (2.5) peut être établie au moyen du Théorème B. Il suffit, en effet, de remarquer que la fonction $f(x, y)$ intervenant dans (5.1) satisfait à l'Hypothèse K et la solution issue de l'origine de (5.1) a la forme $y=x^3$. Cette solution est donc de classe C^∞ et, à plus forte raison, de classe C^2 .

Posons dans la formule (4.1) $c=1$, $p=q=1/2$. Comme $f(0,0)=0$ cette formule prendra la forme $z(x)=xf(x,0)/2$, c'est-à-dire

$$z(x)=x(3x^2-x^3g(x))/2=x^3(3-xg(x))/2.$$

Comme $g'(x)$ n'existe nulle part donc la dérivée $z'(x)$ n'existe pas pour $x \neq 0$. Par cet exemple se trouve établie la partie II du Théorème B, ce qui restait à démontrer.

Ouvrages cités

- [1] T. Wazewski. Une méthode de construction des solutions approchées des équations différentielles ordinaires au cas de l'espace de Banach, Bull. de l'Acad. Polon. des Sci. Vol. XIV, p. 133-136 (1966).

(Ricevita la 13-an de junio, 1966)