Existence des Solutions Asymptotiques d'un Système d'Équations Différentielles

Par TADJA PEYOVITCH

(Université de Belgrade)

Soit donné un système d'équations de la forme

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = a_i(t) + F_i(t, e^{x_1}, e^{x_2}, \dots, e^{x_n}), \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

où $a_i(t)$ sont des fonctions réelles et intégrables pour la variable réelle $t \geq t_0$, $F_i(t, e^{x_1}, e^{x_2}, \dots, e^{x_n})$ des fonctions continues et bornées dans le domaine $D(x_1, x_2, \dots, x_n)^{1)}$ et pour la variable réelle $t \geq t_0$.

Posons

$$(2) \quad e^{x_i} = y_i, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{y_i'}{y_i},$$

le système (1) devient

$$(3) \quad \frac{dy_i}{dt} = a_i(t)y_i + y_i F_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

ou sous la forme

$$(4) \quad \frac{dy_i}{dt} = a_i(t)y_i + \Phi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

avec

$$(5) \quad \Phi_i(t, 0, 0, \dots, 0) = 0,$$

Supposons que les fonctions $\Phi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)^{2)}$ dans le domaine $D_1(y_1, y_2, \dots, y_n)$ correspondant au domaine $D(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et pour la variable réelle $t \geq t_0$ satisfont aux conditions de Lipschitz

$$(6) \quad |\Phi_i(t, Y_1, Y_2, \dots, Y_n) - \Phi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)| \leq \lambda(t) \left(\sum_{i=1}^n |Y_i - y_i| \right),$$

où $\lambda(t)$ est une fonction positive et intégrable pour la variable réelle $t \geq t_0$.

Écrivons les équations (4) sous la forme des équations intégrales

$$(7) \quad y_i = e^{\int_{t_0}^t a_i(t) dt} \left[c_i + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^t a_i(t) dt} \Phi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) dt \right]$$

et appliquons la méthode des approximations successives de Picard.

Nous allons distinguer plusieurs cas :

-
- 1) Le domaine $D(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se peut augmenter infiniment.
 - 2) Les fonctions $\Phi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ sont continues et bornées dans le domaine $D_1(y_1, y_2, \dots, y_n)$ et pour $t \geq t_0$.

1° Supposons que l'on ait

$$(8) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\int_{t_0}^t a_i(t) dt} = k_i \neq 0, \infty, \quad (k_i = \text{constantes})$$

$$(9) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty e^{-\int_{t_0}^t a_i(t) dt} \lambda(t) dt = 0$$

et écrivons les équations (4) sous la forme des équations intégrales

$$(10) \quad y_i = e^{\int_{t_0}^t a_i(t) dt} \left[\frac{l_i}{k_i} - \int_t^\infty e^{-\int_{t_0}^t a_i(t) dt} \Phi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) dt \right],$$

où l_i sont des constantes données.

Si l'on applique la méthode des approximations successives au système (10), on obtient

$$(11) \quad y_i^m = y_i^0 - e^{\int_{t_0}^t a_i(t) dt} \int_t^\infty e^{-\int_{t_0}^t a_i(t) dt} \Phi_i(t, y_1^{m-1}, y_2^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}) dt$$

avec, d'après (8) et (9)

$$(12) \quad y_i^0 = \frac{l_i}{k_i} e^{\int_{t_0}^t a_i(t) dt}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_i^0 = l_i, \quad |y_i^0| \leq M,$$

Il est facile à voir que l'on a

$$(13) \quad y_i^m - y_i^{m-1} = -e^{\int_{t_0}^t a_i(t) dt} \int_t^\infty e^{-\int_{t_0}^t a_i(t) dt} [\Phi_i(t, y_1^{m-1}, y_2^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}) - \Phi_i(t, y_1^{m-2}, y_2^{m-2}, \dots, y_n^{m-2})] dt$$

Pour $m=1$ les équations (11), d'après (5) et (6), donnent

$$|y_i^1 - y_i^0| \leq e^{\int_{t_0}^t a_i(t) dt} \int_t^\infty e^{-\int_{t_0}^t a_i(t) dt} \lambda(t) \left[\sum_{i=1}^n |y_i^0| \right] dt^1)$$

ou, d'après (8), (9) et (12),

$$(14) \quad |y_i^1 - y_i^0| \leq nMe^{\int_{t_0}^t a_i(t) dt} \int_t^\infty e^{-\int_{t_0}^t a_i(t) dt} \lambda(t) dt = nM\varepsilon_i(t) \leq nM\varepsilon$$

avec

$$(15) \quad \varepsilon_i(t) \leq \varepsilon(t) \quad \text{pour } t \geq t_0, \\ \varepsilon = \max_{t \geq t_0} \varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) \rightarrow 0 \quad \text{pour } t \rightarrow \infty.$$

Pour $m=2$ les équations (13), d'après (6) et (14), donnent

$$|y_i^2 - y_i^1| \leq n^2 M \varepsilon \varepsilon(t) \leq M(n\varepsilon)^2.$$

1) On a, d'après (5) et (6),

$$|\Phi_i(t, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)| = |\Phi_i(t, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) - \Phi_i(t, 0, 0, \dots, 0)| \leq \lambda(t) \left[\sum_{i=1}^n |y_i^0| \right].$$

En continuant ainsi de suite, on aura

$$(16) \quad |y_i^m - y_i^{m-1}| \leq M(n\varepsilon)^m.$$

Si l'on a, d'après (15),

$$(17) \quad n\varepsilon < 1$$

les séries

$$y_i = y_i^0 + \sum_{i=1}^{\infty} (y_i^m - y_i^{m-1})$$

convergent uniformément pour $t \geq t_0$ et représentent les solutions des équations (4) satisfaisant aux relations

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_i = \lim_{t \rightarrow \infty} y_i^0 = l_i$$

d'où l'on a, d'après (2)

$$(18) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \log y_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \log y_i^0 = \log l_i$$

Théorème A Les équations (1) admettent, sous les conditions (6), (8), (9) et (17), les solutions asymptotiques pour $t \geq t_0$ avec les propriétés (18).

Si les fonctions $F_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ satisfont encore aux conditions

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0,$$

les équations (1) admettent encore, d'après (2) et (3), les propriétés

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dx_i}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y_i'}{y_i} = \lim_{t \rightarrow \infty} a_i(t)$$

2° Supposons que l'on ait

$$(19) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\int_{t_0}^t a_i(t) dt} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda(t)}{a_i(t)} = 0, \quad a_i(t) \neq 0$$

et écrivons les équations (7) sous la forme

$$y_i^m = y_i^0 + e^{\int_{t_0}^t a_i(t) dt} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^t a_i(t) dt} \Phi_i(t, y_1^{m-1}, y_2^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}) dt$$

avec

$$y_i^0 = C_i e^{\int_{t_0}^t a_i(t) dt}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_i^0 = 0, \quad |y_i^0| \leq M,$$

on aura, d'après (6),

$$|y_i^m - y_i^{m-1}| \leq e^{\int_{t_0}^t a_i(t) dt} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^t a_i(t) dt} \lambda(t) \left[\sum_{i=1}^n |y_i^{m-1} - y_i^{m-2}| \right] dt.$$

En opérant comme dans le cas précédent, on obtient

$$|y_i^m - y_i^{m-1}| \leq M n^m \varepsilon^{m-1} \varepsilon(t) \leq M(n\varepsilon)^m$$

avec

$$\varepsilon_i(t) = e^{\int_{t_0}^t a_i(t) dt} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^t a_i(t) dt} \lambda(t) dt, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_i(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0.$$

Alors les équations (4) admettent les solutions asymptotiques satisfaisant aux relations

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_i = \lim_{t \rightarrow \infty} y_i^0 = 0$$

d'où l'on a, d'après (2),

$$(20) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \log y_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \log y_i^0 = -\infty.$$

Théorème B *Les équations (1) admettent, sous les conditions (6), (17) et (19), les solutions asymptotiques pour $t \geq t_0$ avec les propriétés (20). Ces solutions dépendent de n paramètres arbitraires (constantes d'intégration).*

3° Supposons que l'on ait

$$(21) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\int_{t_0}^t a_i(t) dt} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda(t)}{a_i(t)} = 0, \quad a_i(t) \neq 0$$

et écrivons les équations (4) sous la forme des équations intégrales

$$y_i = -e^{\int_{t_0}^t a_i(t) dt} \int_t^\infty e^{-\int_{t_0}^t a_i(t) dt} \Phi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) dt.$$

En procédant ainsi qu'au cas du numéro 1°, on obtient un système des solutions asymptotiques des (4) satisfaisant aux relations

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_i = 0,$$

d'où l'on a, d'après (2),

$$(22) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \log y_i = -\infty.$$

Théorème C *Les équations (1) admettent sous les conditions (6), (17) et (21), les solutions asymptotiques pour $t \geq t_0$ avec les propriétés (22).*

4° Soient $a_i(t) = 0$, ($i=1, 2, \dots, n$), les équations (10) deviennent

$$y_i = l_i - \int_t^\infty \Phi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) dt$$

et les conditions (9) se ramènent à la condition

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty \lambda(t) dt = 0$$

avec

$$\varepsilon_i(t) = \varepsilon(t) = \int_t^\infty \lambda(t) dt.$$

5° Si l'on a $a_i(t) = \bar{a}_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) où $\bar{a}_i$ sont des constantes négatives, on obtient le deuxième cas.

6° Si l'on a $a_i(t) = \bar{a}_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) où $\bar{a}_i$ sont des constantes positives, on aura le troisième cas.

7° Si les coefficients $a_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) satisfont aux conditions $\lim_{t \rightarrow \infty} a_i(t) = \bar{a}_i$, alors les équations (4) se peuvent écrire sous la forme

$$\frac{dy_i}{dt} = \bar{a}_i y_i + [a_i(t) - \bar{a}_i] y_i + \Phi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

ou

$$\frac{dy_i}{dt} = \bar{a}_i y_i + \Psi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

et les équations (7) deviennent

$$(23) \quad y_i = C_i e^{\bar{a}_i(t-t_0)} + e^{\bar{a}_i t} \int_{t_0}^t e^{-\bar{a}_i t} \Psi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) dt.$$

Le procédé de recherche des solutions asymptotiques des équations (23) se ramène à un des cas du numéro 2 ou 3 ou 4.

Dans cette étude des solutions asymptotiques du système (1) nous supposons que tous les coefficients $a_i(t)$ satisfaisaient à la même condition. Mais on peut arriver, c'est qui est le plus souvent, que les coefficients $a_i(t)$ du système (1) satisfont aux conditions différentes qui sont données dans les cas précédents.

Ce sera plus tard l'objet d'une autre étude.

(Ricevita la 21-an de februaro, 1966)