Funkcialaj Ekvacioj, 8 (1965) 39-43

Sur l'intégrale de Riemann-Stieltjes

Par Tokui SATŌ
(Université de Kōbe)

1. Dans la définition de l'intégrale de Riemann, la fonction $\sigma(x)\equiv x$ joue implicitement un rôle essentiel. Il est bien connu que T. J. Stieltjes[1] a reconnu ce fait pour la première fois. Depuis lors beaucoup de mathématiciens ont recherché l'intégrale de Stieltjes, parmi eux, H. Lebesgue a défini l'intégrale de Riemann-Stieltjes dans son célèbre livre[2].

Il me semble qu'il est bien naturel de proposer le problème suivant:

généraliser la fonction $\sigma(x)$ autant que possible sous la seule condition que les théorèmes importants concernants l'intégrale de Riemann s'étendent au cas de l'intégrale de Riemann-Stieltjes.

2. D'abord cherchons des conditions de $\sigma(x)$ sous lesquelles les propriétés élémentaires de l'intégrale de Riemann subsistent bien dans le cas de l'intégrale de Riemann-Stietjes.

Sauf mention expresse du contraire, on suppose $\sigma(x)$ bornée et non décroissante dans $[a,b]$, et $f(x)$ bornée dans $[a,b]$.

Divisons $[a,b]$ en intervalles partiels à l'aide des nombres croissants

D: $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$.

Désignons par M_j et m_j les bornes supérieure et inférieure de $f(x)$ dans l'intervalle $[x_{j-1},x_j]$ $(j=1,2,\cdots,n)$ respectivement et posons

$$S_D[\sigma]=\sum_{j=1}^n M_j(\sigma(x_j)-\sigma(x_{j-1})),$$

$$s_D[\sigma]=\sum_{j=1}^n m_j(\sigma(x_j)-\sigma(x_{j-1})).$$

Avec Darboux on appelle *intégrale par excès* et *intégrale par défaut* $\inf_D S_D[\sigma]$ et $\sup_D s_D[\sigma]$ respectivement et on les représente par les symboles $\overline{\int_a^b} f(x)d\sigma(x)$ et $\underline{\int_a^b} f(x)d\sigma(x)$. Nous avons alors $\underline{\int_a^b} f(x)d\sigma(x)\leqq\overline{\int_a^b} f(x)d\sigma(x)$.

En particulier, lorsqu'on a

$$\underline{\int_a^b} f(x)d\sigma(x)=\overline{\int_a^b} f(x)d\sigma(x),$$

on dit que $f(x)$ est intégrable au sens de Riemann-Stieltjes par rapport à $\sigma(x)$

ou brièvement σ-intégrable dans l'intervalle $[a,b]$ et cette valeur commune $\underline{\int_a^b} f(x)d\sigma(x)=\overline{\int_a^b} f(x)d\sigma(x)$ s'appelle *intégrale au sens de Riemann-Stieltjes par rapport à $\sigma(x)$ dans $[a, b]$* et se note $\int_a^b f(x)d\sigma(x)$.

De la définition on déduit aisément le théorème suivant.

Théorème 1. *Désignons* $\max_{j=1}^n \{x_j - x_{j-1}\}$ *par* $\delta(D)$; *on a*

$$\lim_{\delta\to 0} S_D[\sigma]=\overline{\int_a^b} f(x)d\sigma(x),$$
$$\lim_{\delta\to 0} s_D[\sigma]=\underline{\int_a^b} f(x)d\sigma(x).$$

Corollaire 1. *Soient $f(x)$ σ-intégrable dans $[a,b]$, et ξ_j un point arbitraire dans $[x_{j-1}, x_j]$ $(j=1,2,\cdots,n)$. On a alors*

$$\lim_{\delta\to 0} \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(\sigma(x_j)-\sigma(x_{j-1}))=\int_a^b f(x)d\sigma(x).$$

Réciproquement on a le corollaire suivant.

Corollaire 2. *Soit $\{D\}$ une famille de divisions telle que $\delta(D)\to 0$. S'il existe la limite*

$$I=\lim_{\delta\to 0} \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(\sigma(x_j)-\sigma(x_{j-1}))$$

indépendante de $\xi_j(j=1, 2, \cdots\cdots, n)$ dans $[x_{j-1}, x_j]$, $f(x)$ est σ-intégrable et on a

$$I=\int_a^b f(x)d\sigma(x).$$

Théorème 2. *Pour que $f(x)$ soit σ-intégrable dans $[a,b]$, il faut et il suffit qu'on puisse prendre une division D telle que*

$$S_D[\sigma]-s_D[\sigma]<\varepsilon,$$

où $\varepsilon>0$ est un nombre donné à l'avance.

Corollaire 1. *Si $f(x)$ est continue dans $[a,b]$, $f(x)$ est σ-intégrable dans $[a,b]$.*

Corollaire 2. *Si $\sigma(x)$ est continue dans $[a,b]$, une fonction bornée et monotone est σ-intégrable.*

Nous conviendrons de définir :

$$\int_a^a f(x)d\sigma(x)=0, \qquad \int_b^a f(x)d\sigma(x)=-\int_a^b f(x)d\sigma(x).$$

Avec cette convention nous avons aisément le corollaire suivant.

Corollaire 3. *Si $f(x)$ est σ-intégrable dans un intervalle fermé contenant a, b, c, on a*

$$\int_a^c f(x)d\sigma(x)+\int_c^b f(x)d\sigma(x)=\int_a^b f(x)d\sigma(x).$$

Corollaire 4. *Si $f(x)$ et $g(x)$ sont σ-intégrables dans $[a,b]$, $f(x)+g(x)$ et $f(x)g(x)$ sont aussi σ-intégrables dans $[a,b]$ et on a*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))d\sigma(x)=\int_a^b f(x)d\sigma(x)+\int_a^b g(x)d\sigma(x).$$

Corollaire 5. *Si $f(x)$ est σ-intégrable dans $[a,b]$, $f(x)$ est aussi σ-intégrable dans un intervalle fermé quelconque contenu dans $[a,b]$.*

Quant à la réciproque de cette proposition, on a le corollaire suivant.

Corollaire 6. *Soit $\sigma(x)$ continue dans $[a,b]$.*

Si $f(x)$ est σ-intégrable dans un intervalle fermé quelconque contenu dans l'intervalle ouvert (a,b), $f(x)$ est σ-intégrable dans $[a,b]$.

Théorème 3. *Si $f(x)$ est σ-intégrable dans $[a,b]$ et non négative dans (a,b), on obtient*

$$\int_a^b f(x)d\sigma(x)\geqq 0.$$

En effet, par l'hypothèse on a $S_D[\sigma]\geqq 0$ pour une division quelconque D de $[a,b]$. On obtient donc

$$\int_a^b f(x)d\sigma(x)\geqq 0.$$

Corollaire. *Si $f(x)$ est σ-intégrable dans $[a,b]$, $|f(x)|$ est aussi σ-intégrable dans $[a,b]$ et on a*

$$\int_a^b f(x)d\sigma(x)\geqq\int_a^b |f(x)|d\sigma(x).$$

Théorème 4. *Supposons $\sigma(x)$ non constante dans (a,b).*

Si $f(x)$ est σ-intégrable, il existe au moins un point $\in(a,b)$ où $f(x)$ est continue.

En vertu du théorème 3, on obtient aisément le corollaire suivant.

Corollaire. *Soit $\sigma(x)$ non constante dans (a,b).*

Si $f(x)$ est σ-intégrable dans $[a,b]$, et positive dans (a,b), on obtient

$$\int_a^b f(x)d\sigma(x)>0.$$

3. En résumant les résultats obtenus, *on peut conclure que tous les théorèmes et les corollaires énoncés dans le numéro précédent subsistent pour une fonction $\sigma(x)$ continue dans $[a,b]$, non constante et non décroissante dans (a,b).*

Nous pouvons donc considérer cette conclusion comme une réponse au problème proposé dans le numéro 1.

Pour justifier cet énoncé, montrons que sous les conditions de $\sigma(x)$ ci-dessus d'auters théorèmes importants concernant l'intégrale de Riemann subsistent pour l'intégrale de Riemann-Stieltjes par rapport à $\sigma(x)$.

Dans toute la suite, *on suppose $\sigma(x)$ continue dans $[a,b]$, non constante et* *non décroissante dans* (a, b), *et* $f(x)$ *bornée dans* $[a, b]$.

Soient $f(x)$ une fonction définie dans (a, b) et $[x', x'']$ un intervalle fermé quelconque contenu dans (a, b). Lorsqu'il existe un point $\xi \epsilon [x', x'']$ tel que $f(\xi)=\mu$, où μ est une valeur quelconque entre deux valeurs $f(x')$ et $f(x'')$, $f(x)$ s'appelle fonction posédant la propriété de Darboux dans (a, b).

Théorème 5. *Soient* $f(x)$ *et* $\varphi(x)$ σ*-intégrables dans* $[a, b]$ *et* $\varphi(x) \geqq 0$ *dans* (a, b).

Si $f(x)$ *possède la propriété de Darboux dans* (a, b), *on a*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)d\sigma(x)=f(\xi)\int_a^b \varphi(x)d\sigma(x) \qquad (a<\xi<b). \tag{1}$$

Preuve. $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant σ-intégrables dans $[a, b]$, d'après le corollaire 4 du théorème 2, $f(x)\varphi(x)$ est σ-intégrable dans $[a, b]$. Désignons par M et m les bornes supérieure et intérieure de $f(x)$ dans (a, b) respectivement. $\varphi(x)$ étant non négative dans (a, b), on a dans (a, b)

$$m\varphi(x) \leqq f(x)\varphi(x) \leqq M\varphi(x).$$

D'après le théorème 3, on obtient

$$\int_a^b \varphi(x)d\sigma(x) \geqq 0,$$

$$m\int_a^b \varphi(x)d\sigma(x) \leqq \int_a^b f(x)\varphi(x)d\sigma(x) \leqq M\int_a^b \varphi(x)d\sigma(x).$$

Si

$$\int_a^b \varphi(x)d\sigma(x)=0,$$

on a évidemment (1).

Si

$$\int_a^b \varphi(x)d\sigma(x)>0,$$

posons

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)d\sigma(x)=\mu\int_a^b \varphi(x)d\sigma(x).$$

On obtient alors

$$m \leqq \mu \leqq M.$$

D'abord considérons le cas où $m=\mu$. $\int_a^b \varphi(x)d\sigma(x)$ étant positif, on peut prendre une division D telle que

$$S_D[\sigma]=\textstyle\sum_{j=1}^n m_j(\sigma(x_j)-\sigma(x_{j-1}))>0,$$

m_j désignant la borne inférieure de $\varphi(x)$ dans $[x_{j-1}, x_j]$.

On peut donc prendre un intevalle $[x', x'']$ $(a<x'<x''<b)$ où $\varphi(x)>0$.

Montrons qu'il existe un point ξ tel que $f(\xi)=m$, $\xi \epsilon [x', x'']$. Pour raisonner par l'absurde, supposons que $f(x) \neq m$ en tout point de $[x', x'']$. Par définition on a $m \leqq f(x)$ dans (a, b). On obtient donc $m < f(x)$ dans $[x', x'']$. En vertu du corollaire du théorème 4, on a

$$\int_{x'}^{x''} f(x)\,\varphi(x) d\sigma(x) > m \int_{x'}^{x''} \varphi(x) d\sigma(x).$$

D'après le corollaire 3 du théorème 2 et le théorème 3, on obtient

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x) d\sigma(x) > m \int_a^b \varphi(x) d\sigma(x).$$

On a donc

$$m < \mu;$$

contrairement à nôtre hypothèse.

De même dans le cas où $\mu = M$, on obtient (1).

Enfin considérons le cas où $m < \mu < M$. Prenons $\varepsilon(>0)$ tel que $\varepsilon < \mu - m$, $M - \mu$. Par définition, il existe x' et x'' dans (a, b) tels que

$$m \leqq f(x') < m + \varepsilon, \quad M - \varepsilon < f(x'') \leqq M.$$

On a donc

$$f(x') < \mu < f(x'').$$

$f(x)$ possédant la propriété de Darboux dans (a, b), il existe entre x' et x'' un point $x = \xi$ tel que $f(\xi) = \mu$.

De même dans le cas de l'intégrale de Riemann, on obtient les théorèmes suivants.

Théorème 6. *Soient $f(x)$ σ-intégrable, et $\varphi(x)$ bornée et monotone dans $[a, b]$. On a alors*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) d\sigma(x) = \varphi(a) \int_a^\xi f(x) d\sigma(x) + \varphi(b) \int_\xi^b f(x) d\sigma(x)$$

Théorème 7. *Soit $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions σ-intégrables dans $[a, b]$. Si $\{f_n(x)\}$ converge vers une fonction $f(x)$ uniformément dans $[a, b]$, $f(x)$ est σ-intégrable dans $[a, b]$ et on a*

$$\int_a^b f(x) d\sigma(x) = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x) d\sigma(x).$$

Théorème 8. *Soit $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions σ-intégrables dans $[a, b]$. Si $\{f_n(x)\}$ est uniformément bornée et converge vers une fonction $f(x)$ σ-intégrable dans $[a, b]$, on a*

$$\int_a^b f(x) d\sigma(x) = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x) d\sigma(x).$$

Référence

[1] T. J. Stieltjes, Recherch sur les fractions continues, Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse, 8, 1-122, (1894).

[2] H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives (Deuxième édition), (Gauthier-Villars) (1927).

(Prezentita la 16-an de majo, 1965)