Sur Une note de M. Hukuhara

Par Oswald WYLER

(Université de New Mexico)

Dans [1], H. Hukuhara a discuté des conditions suffisantes pour la dépendance linéaire de $n+1$ applications linéaires d'un espace vectoriel U dans un espace vectoriel V . Ses résultats sont basés sur un lemme qui correspond au cas spécial $\dim U=2$. Malheureusement, sa démonstration de ce lemme est défective. Dans cette note, nous donnerons une démonstration simple du lemme de M. Hukuhara pour $n=1$ et $n=2$, et nous montrerons par un exemple que le lemme n'est pas toujours vrai pour $n \geq 3$. Conclusion: tous les théorèmes de [1], sauf Proposition 2', sont vrais.

Disons que $n+1$ vecteurs de V sont *symétriquement dépendants* si chacun des $n+1$ vecteurs est une combinaison linéaire des autres n vecteurs. Alors le lemme de M. Hukuhara est l'énoncé suivant que nous appellerons (H).

(H). Soient $a_1, \dots, a_n$ des vecteurs de V , linéairement indépendants, soit $a = \sum_{j=1}^n \alpha_j a_j$ avec des coefficients α_j tous non nuls, et soient $b, b_1, \dots, b_n$ des vecteurs de V tels que les $n+1$ vecteurs

$$\lambda a + \mu b, \lambda a_1 + \mu b_1, \dots, \lambda a_n + \mu b_n$$

sont symétriquement dépendants pour chaque choix des scalaires λ et μ . Alors

$$\lambda a + \mu b = \sum_{j=1}^n \alpha_j (\lambda a_j + \mu b_j)$$

pour chaque choix des scalaires λ et μ .

Nous supposerons dans cette note que le corps des scalaires de V soit commutatif et algébriquement clos. Cette condition est implicite dans [1]. L'exemple suivant montre qu'elle est bien nécessaire.

Exemple. Soit V un espace vectoriel sur le corps des nombres réels. Soient a_1 , et a_2 des vecteurs de V , linéairement indépendants, soit $b_1 = a_2$ et $b_2 = -a_1$, et soit $a = a_1 + a_2$ et $b = 2b_1 + b_2$. Alors les trois vecteurs $\lambda a + \mu b$, $\lambda a_1 + \mu b_1$, $\lambda a_2 + \mu b_2$ sont symétriquement dépendants pour chaque choix de nombres réels λ et μ . Néanmoins la conclusion de (H) est évidemment fausse.

Supposons maintenant que l'hypothèse de (H) soit vérifiée, et que les vecteurs $a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_r$ de V forment une base du sous-espace de V engendré par les vecteurs $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ de V . Notons par $\mathfrak{a} = (a_j)$, $\mathfrak{b} = (b_j)$, $\mathfrak{c} = (c_h)$ des colonnes de vecteurs de V . (Si $r=0$, on supprimera dans ce qui suit tous

les termes avec c .) On a alors des relations

$$a = A\alpha, \quad b = B\beta, \quad b = \Sigma\alpha + \Gamma c,$$

où A et B sont des lignes, Σ et Γ des matrices de scalaires, et où les éléments de A sont tous non nuls. On a alors

$$\lambda a + \mu b = (\lambda A + \mu B \Sigma)\alpha + \mu B \Gamma c, \quad \lambda a + \mu b = (\lambda I + \mu \Sigma)\alpha + \mu \Gamma c,$$

où I est la matrice unité. Avec ces notations, l'hypothèse de (H) dit que les $n+1$ lignes de la matrice

$$(1) \quad \begin{bmatrix} \lambda A + \mu B \Sigma & \mu B \Gamma \\ \lambda I + \mu \Sigma & \mu \Gamma \end{bmatrix}$$

sont symétriquement dépendantes pour tous les choix de λ et de μ , et la conclusion de (H) est vraie si et seulement si $A\Sigma = B\Sigma$ et $A\Gamma = B\Gamma$.

Nous pouvons poser $\mu=1$, sans restreindre la généralité. Soit alors $\Delta = \det(\lambda I + \Sigma)$. Il y a, par hypothèse, une ligne C telle que

$$(2) \quad \lambda A + B = C(\lambda I + \Sigma), \quad B\Gamma = C\Gamma,$$

avec éléments tous non nuls si $\Delta \neq 0$. C peut dépendre de λ .

Mettons $D = (B - A)\Sigma$. Alors la première équation de (2) devient :

$$(3) \quad D + A(\lambda I + \Sigma) = C(\lambda I + \Sigma).$$

Pour démontrer (H) , il suffit de démontrer que $D=0$.

En effet, soit $D=0$, et choisissons λ tel que $\Delta \neq 0$. Alors $C=A$ par (3), donc $B\Gamma = A\Gamma$ par la seconde équation de (2).

Le cas $n=1$ est trivial. (3) devient

$$D + (\lambda + \sigma)A = (\lambda + \sigma)C,$$

où $\Sigma = (\sigma)$. Pour $\lambda = -\sigma$, nous obtenons $D=0$.

Pour $n > 1$, soit Φ la matrice adjointe de $\lambda I + \Sigma$, pour laquelle $(\lambda I + \Sigma)\Phi = \Delta I = \Phi(\lambda I + \Sigma)$. Alors (3) donne

$$(4) \quad D\Phi + \Delta A = \Delta C.$$

Pour $n=2$, cette équation devient :

$$D \begin{bmatrix} \lambda + \sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{21} & \lambda + \sigma_{11} \end{bmatrix} + \Delta A = \Delta C.$$

Si ρ est une racine de l'équation quadratique $\Delta=0$, on a donc

$$D \begin{bmatrix} \rho + \sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{21} & \rho + \sigma_{11} \end{bmatrix} = 0.$$

Par subtraction, on obtient

$$(\lambda - \rho)D + \Delta A = \Delta C.$$

Si ρ' est l'autre racine de $\Delta=0$, on a $\Delta = (\lambda - \rho)(\lambda - \rho')$, donc

$$(5) \quad D + (\lambda - \rho')A = (\lambda - \rho')C$$

pour $\lambda \neq \rho$.

Si $\rho' \neq \rho$, alors $D=0$ résulte de (5), avec $\lambda = \rho'$.

Si $\rho' = \rho$, mettons $A = (\alpha_j)$, $C = (\gamma_j)$, $D = (\delta_j)$. Si $\delta_j \neq 0$, on a $\gamma_j = 0$ pour

$\lambda = \rho - \delta_j / \alpha_j \neq \rho$, donc $\gamma_j = 0$ avec $\Delta \neq 0$, contradiction. Donc $\delta_j = 0$ pour $j=1, 2$, i. e. $D=0$.

Nous venons de démontrer (H) pour $n=2$. L'exemple suivant montre que (H) peut bien être faux pour $n \geq 3$.

Exemple. Soient a_1, a_2, a_3 linéairement indépendants. Mettons

$$b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = a_2, \quad b_3 = a_2 + 2a_3, \quad a = a_1 + a_2 + a_3, \quad b = b_1 + 2b_2 + b_3.$$

On voit facilement que l'hypothèse de (H) est satisfaite. Lorsque $\mu=1$, notons que $\Delta=0$ pour $\lambda=-1$ (racine double) et $\lambda=-2$. Pour $\mu \neq 0$, la conclusion de (H) est fautive.

Remarquons en concluant, et sans démonstration, que (H) reste vrai, même pour $n \geq 3$, dans les trois cas suivants. (1) $n-r \leq 2$, où $n+r$ est la dimension du sous-espace de V engendré par $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$. (2) La matrice Σ se transforme dans une matrice diagonale par changement de base (i. e. Σ a une matrice de Jordan diagonale). (3) L'équation $\Delta=0$ n'a qu'une seule racine.

Référence

- [1] M. HUKUHARA: Sur la dépendance linéaire de trois applications linéaires. Funkc. Ekvac. 6 (1964), 47-54.

(Ricevita la 13-an de Januaro, 1956)